C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 145–150, 2001
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Sur un problème elliptique non linéaire avec diffusion singulière et second membre dans L^1

Concepción GARCÍA VÁZQUEZ, Francisco ORTEGÓN GALLEGO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, CASEM, 11540 Puerto Real, Cádiz, Espagne
Courriel : concepcion.garcia@uca.es, francisco.ortegon@uca.es

(Reçu le 20 mars 2000, accepté le 4 décembre 2000)

Résumé. Nous étudions l'existence et l'unicité de solution d'un problème elliptique non linéaire ayant une matrice de diffusion de la forme $B_1 + B_2a(u)$, où $B_1, B_2 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)^{N\times N}$ sont définies positives et $a(s)$ est une fonction continue, définie sur l'interval $(s_0, +\infty)$, $s_0 \in \mathbb{R}$, et $\lim_{s\to s_0^+} a(s) = +\infty$; d'autre part, le second membre de l'équation appartient à l'espace $\mathrm{L}^1(\Omega)$. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On a nonlinear elliptic problem with singular diffusion and right hand side in L^1

Abstract. *We study the existence and unicity of a solution to a non-linear elliptic problem with a matrix diffusion coefficient of the form $B_1 + B_2a(u)$ where $B_1, B_2 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)^{N\times N}$ are positive defined and $a(s)$ is a continuous function defined on the interval $(s_0, +\infty)$, $s_0 \in \mathbb{R}$, and satisfies $\lim_{s\to s_0^+} a(s) = +\infty$; furthermore, the right hand side of the partial differential equation lies in $\mathrm{L}^1(\Omega)$.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded open set. We study the following nonlinear elliptic problem:

$$\begin{cases} w\nabla u - \nabla\cdot\big[\big(B_1 + B_2a(u)\big)\nabla u\big] + g(x,u) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $w \in \mathrm{L}^2(\Omega)^N$, $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ and $g : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are given data, and $\lim_{s\to s_0^+} a(s) = +\infty$, $s_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

This kind of problems may appear in some physical models, for instance, the turbulent energy dissipation, ε, of the so-called k-ε turbulence model, is governed by an equation like (1).

The case $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ has been studied by Blanchard and Redwane in [1] for $w = 0$, $g(x,u) = \lambda u$, and $a(s)$ a diagonal matrix.

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

S0764-4442(00)01797-3/FLA

Due to the singularity of the diffusion coefficient, problem (1) contains a term which becomes an indetermination on the set $\{u = s_0\}$, which may not be negligible. On the other hand, we do not assume any hypothesis on the asymptotic behaviour of $a(s)$ for $s \to +\infty$. This means that the notion of weak solution is not well-suited for this setting. In this way, we introduce the concept of renormalized solution for problem (1) (conditions (R1)–(R4)). Under hypotheses (H1)–(H5), we show the existence of a renormalized solution u such that $u \in \mathrm{W}_0^{1,q}(\Omega)$, $a(u)\nabla u \chi_{\{u>s_0\}} \in \mathrm{L}^q(\Omega)^N$, for all $q < \frac{N}{N-1}$; furthermore, any renormalized solution of (1) lies in $\mathrm{W}_0^{1,q}(\Omega)$, for all $q < \frac{N}{N-1}$ (Theorem 1).

The uniqueness of renormalized solutions may be proved under more restrictive assumptions (Theorem 2).

1. Introduction

On considère un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N > 1)$ ouvert et borné. Nous étudions le problème elliptique non linéaire suivant

$$\begin{cases} w\nabla u - \nabla \cdot \big[\big(B_1 + B_2 a(u)\big)\nabla u\big] + g(x,u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

avec $w \in \mathrm{L}^2(\Omega)^N$, $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ et $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ données et, de plus, $\lim_{s\to s_0^+} a(s) = +\infty$, $s_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ce type de problèmes apparaît dans certains modèles physiques, où une ou plusieurs équations contiennent coefficients singuliers pour une valeur finie d'une des inconnues. En fait, ce travail est motivé par l'étude de l'équation de ε (dissipation de l'énergie cinétique turbulente) du modèle k-ε ; dans le cas incompressible, cette équation prend la forme

$$\begin{cases} w\nabla\varepsilon - \nabla \cdot \left[\left(\nu_0 + c_1\dfrac{k^2}{\varepsilon}\right)\nabla\varepsilon\right] + c_3\dfrac{\varepsilon^2}{k} = \dfrac{1}{2}\, c_2 k\left|\nabla w + \nabla w^T\right|^2 & \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon = \overline{\varepsilon} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

k étant l'énergie cinétique turbulente, w le champ de vitesses, ν_0 la viscosité du fluide et c_1, c_2 et c_3 des valeurs constantes.

Dans les dernières années plusieurs auteurs ont étudié certains problèmes elliptiques non linéaires avec second membre dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$; nous citons, par exemple, les travaux de Boccardo et Gallouët [2], Boccardo, Gallouët, Giachetti et Murat [3] et Murat [7]. Néanmoins, à la difficulté du second membre dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$ nous ajoutons une autre difficulté considérable : la singularité du coefficient de diffusion $a(s)$ pour une valeur finie $s = s_0$. Ce type de problèmes elliptiques contenant un coefficient singulier ont été étudiés par Blanchard et Redwane dans [1] ; dans cette référence, on n'a considéré que le cas $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, avec $w = 0$ et $g(x,u) = \lambda u$, pourtant $a(s)$ est une matrice diagonale.

2. Le résultat d'existence

Nous considérons les hypothèses suivantes sur les données :

(H1) $B_1, B_2 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)^{N\times N}$, et il existe $\alpha > 0$ tel que $B_i(x)\xi\xi \geqslant \alpha|\xi|^2$ presque partout (p.p.t.) $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, 2$;

(H2) $a : (s_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est continue, $s_0 \in \mathbb{R}$, $s_0 < 0$, $a(s) \geqslant 0$, pour tout $s > s_0$ et $\lim_{s\to s_0^+} a(s) = +\infty$;

(H3) $g : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory telle que $g(x,s)s \geqslant 0$ p.p.t. $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, et pour chaque $m > 0$, il existe $d_m \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ telle que $\sup_{|s|\leqslant m} |g(x,s)| \leqslant d_m(x)$ p.p.t. $x \in \Omega$;

(H4) $w \in \mathrm{L}^2(\Omega)^N$, $\nabla \cdot w = 0$ dans Ω, $w \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$, et Ω est lipschitzien (n étant le vecteur unitaire, normal à $\partial\Omega$ et extérieur à Ω) ;

(H5) $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$.

Remarque 1. – Nous avons déjà commenté que les principales difficultés du problème (1) consiste à supposer les hypotheses (H2) et (H5). En ce qui concerne (H4), cela ajoute une autre difficulté, puisqu'on ne suppose pas que $w \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)^N$; dans le cas $w \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)^N$ l'hypothése (H4) peut être remplacée par

(H4)′ $w \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)^N$ et $\nabla \cdot w = 0$ dans Ω ;

et donc on ne suppose aucune hypothèse sur la régularité de $\partial\Omega$. Notons aussi que, dans (H4), l'identité $w \cdot n = 0$ a un sens au moins dans le espace $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Par ailleurs, nous devons donner un sens à une solution du problème (1). En effet, même pour $u \in \mathrm{W}_0^{1,q}(\Omega)$ l'équation aux dérivées partielles contient le terme $B_2 a(u)\nabla u$, lequel est une indétermination sur l'ensemble $\{u = s_0\}$ qui peut, le cas écheant, être non négligeable ; en outre, la croissance de $a(s)$ quand $s \to +\infty$ peut poser aussi des problèmes. Toutes ces remarques impliquent en particulier que la notion de solution faible n'est pas suffisante pour ce cadre. De la même manière que dans [1], nous allons définir le concept de solution renormalisée adapté au probléme (1). On note par T_j la fonction de troncature à la hauteur j, c'est-à-dire $T_j(s) = \operatorname{signe} s \min(|s|, j)$, et on introduit l'espace $\mathrm{W}_c^{1,\infty}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}\varphi \text{ compact}\}$.

DÉFINITION. – Une fonction u est dite *solution renormalisée du problème* (1) si elle vérifie les conditions suivantes :

(R1) $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, $u \geqslant s_0$ p.p.t. $x \in \Omega$, $a(u)\nabla u \chi_{\{u>s_0\}} \in \mathrm{L}^1(\Omega)^N$, $g(u) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$;

(R2) $T_j(u) \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $a(u)^{1/2}\nabla T_j(u)\chi_{\{u>s_0\}} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^N$, pour tout $j > 0$;

(R3) $\displaystyle\lim_{\eta\to 0} \frac{1}{\eta} \int_{\{s_0+\eta<u<s_0+2\eta\}} \big(B_1 + B_2 a(u)\big)\nabla u \nabla u G(u) = \int_{\{u=s_0\}} \big(g(u) - f\big)G(u)$, pour tout $G \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} G'$ compact ;

(R4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\{s_0<u\leqslant n\}} \big(B_1 + B_2 a(u)\big)\nabla u \nabla u = 0$;

(R5) pour tout $h \in \mathrm{W}_c^{1,\infty}(\mathbb{R})$ avec $h(s_0) = 0$, on a

$$\int_\Omega w\nabla u h(u) v + \int_\Omega \big(B_1 + B_2 a(u)\big)\nabla u \nabla v h(u)\chi_{\{u>s_0\}} + \int_\Omega \big(B_1 + B_2 a(u)\big)\nabla u \nabla u h'(u) v \chi_{\{u>s_0\}} + \int_\Omega g(u)h(u)v = \int_\Omega f h(u) v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Remarque 2. – La condition (R3) décrit le comportement de u au voisinage de s_0. En effet, puisque les fonctions h de (R5) s'annulent au point s_0, on perd toute l'information de u sur l'ensemble $\{u = s_0\}$, et donc, (R3) recupère cette information.

La condition (R4) fixe un comportement asymptotique de l'énergie pour des grands valeurs de u. En fait, en général on n'a pas $a(u)\nabla u \nabla u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, non seulement parce que $u \notin \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, mais aussi parce qu'on ne suppose aucune hypothèse sur le comportement à l'infini de $a(s)$.

Remarque 3. – On voit que formellement, (R5) est déduite en multipliant l'equation aux derivées partielles de (1) par $h(u)$, et puis en considérant l'egalité obtenue au sens des distributions.

Remarque 4. – Si dans (R5) les fonctions h sont telles que $\operatorname{supp} h$ est compact dans $(s_0, +\infty)$, alors la formulation variationnelle reste valable pour $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

THÉORÈME 1. – *Sous les hypothèses* (H1)–(H5) (*ou bien* (H4) *remplacé par* (H4)′), *le problème* (1) *admet au moins une solution renormalisée telle que*

$$u \in \mathrm{W}_0^{1,q}(\Omega), \quad a(u)\nabla u\chi_{\{u>s_0\}} \in \mathrm{L}^q(\Omega), \quad \forall q < \frac{N}{N-1},$$

et alors, la formulation (R5) *reste valable pour tout* $v \in \mathrm{W}_0^{1,q'}(\Omega)$, $q' > N$. *Toute solution renormalisée de* (1) *appartient à* $\mathrm{W}_0^{1,q}(\Omega)$, *pour tout* $q < \frac{N}{N-1}$.

Schéma de la démonstration. – Grâce à (H4), il existe une suite $(w_\delta) \subset \mathrm{L}^\infty(\Omega)^N$, $\nabla \cdot w_\delta = 0$ dans Ω et telle que $\lim_{\delta\to 0} w_\delta = w$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^N$ (si l'on a (H4)′, alors on peut prendre $w_\delta = w$). On introduit la fonction de troncature

$$T^\delta(s) = \begin{cases} 1/\delta & \text{si } s \geqslant 1/\delta, \\ s & \text{si } s_0 + \delta < s < 1/\delta, \\ s_0 + \delta & \text{si } s \leqslant s_0 + \delta, \end{cases}$$

puis les fonction tronquées $a_\delta(s) = a(T^\delta(s))$, $g_\delta(x,s) = T_{1/\delta}(g(x, T_{1/\delta}(s)))$ et $f_\delta(x) = T_{1/\delta}(f(x))$; enfin, pour $0 < \delta < -s_0$ on pose les problèmes approchées

$$(\mathrm{P})_\delta \qquad \begin{cases} u_\delta \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega w_\delta \nabla u_\delta v + \int_\Omega \big(B_1 + B_2 a_\delta(u_\delta)\big) \nabla u_\delta \, \nabla v + \int_\Omega g_\delta(u_\delta) v = \int_\Omega f_\delta v, \quad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega). \end{cases}$$

L'existence de solution du problème $(\mathrm{P})_\delta$ peut être obtenue par application du théorème du point fixe de Schauder.

Posons

$$A_\delta(s) = \int_0^s a_\delta(t)\,\mathrm{d}t, \quad z_\delta = A_\delta(u_\delta) \quad \text{et} \quad G_j(s) = T_{j+1}(s) - T_j(s).$$

Alors, on vérifie sans peine que

$$\int_\Omega \big|\nabla G_j(u_\delta)\big|^2 \leqslant C, \quad \int_\Omega \big|\nabla G_j(z_\delta)\big|^2 \leqslant C, \quad \text{pour tout } j \geqslant 0\,;$$

donc les suites u_δ et z_δ satisfont les estimations de Boccardo et Gallouët [1,5] ; par conséquent, ils existent $u, z \in \mathrm{W}^{1,q}(\Omega)$ et des sous-suites (notées de la même manière) telles que

$$\begin{aligned} &u_\delta \rightharpoonup u, \quad z_\delta \rightharpoonup z \quad \text{dans } \mathrm{W}_0^{1,q}(\Omega)^N\text{-faible, pour tout } q:\ 1 \leqslant q < \tfrac{N}{N-1}\,; \\ &u_\delta \to u, \quad z_\delta \to z \quad \text{dans } \mathrm{L}^r(\Omega)\text{-fort, pour tout } r:\ 1 \leqslant r < \tfrac{N}{N-2}\,; \\ &u_\delta \to u \quad \text{p.p.t. } x \in \Omega, \end{aligned}$$

On montre alors que $u \geqslant s_0$ p.p.t. $x \in \Omega$, $\nabla z = a(u)\nabla u$ sur l'ensemble $\{u > s_0\}$, et $g_\delta(u_\delta) \to g(u)$ dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$-fort. En suite, on démontre les convergences

$$a_\delta(u_\delta)^{1/2} \nabla u_\delta \rightharpoonup a(u)^{1/2} \nabla u \chi_{\{u>s_0\}} \quad \text{dans } \mathrm{L}^q(\Omega)^N\text{-faible,}$$

et

$$\big(B_1 + B_2 a_\delta(u_\delta)\big)^{1/2} \nabla T_j(u_\delta) \rightharpoonup \big(B_1 + B_2 a(u)\big)^{1/2} \nabla T_j(u) \chi_{\{u>s_0\}} \tag{2}$$

dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^N$-faible, pour tout $j>0$. En particulier, $a(u)|\nabla T_j(u)|^2\chi_{\{u>s_0\}}\in \mathrm{L}^1(\Omega)$, pour tout $j>0$. Le pas le plus compliqué c'est de montrer que, en fait, la convergence en (2) est forte. Pour ce faire, on considère les fonctions p_ℓ, $k_\ell=p_\ell-1$ et h_ℓ, où

$$p_\ell(s)=\begin{cases}0 & \text{si } s\leqslant s_0+1/\ell,\\ \ell(s-s_0-1/\ell) & \text{si } 1/\ell<s-s_0<2/\ell,\\ 1 & \text{si } s>s_0+2/\ell,\end{cases}\qquad h_\ell(s)=\begin{cases}-|s|/\ell+2 & \text{si } \ell\leqslant|s|\leqslant 2\ell,\\ 1 & \text{si } |s|\leqslant\ell,\\ 0 & \text{si } |s|\geqslant 2\ell,\end{cases}$$

et on prend, dans (P)$_\delta$, $v=T_j(u)p_\ell(u_\delta)h_\ell(z_\delta)$ et $v=T_j(u)k_\ell(u_\delta)h_\ell(z_\delta)$, et on passe d'abord à la limite (ou limite supérieure) en $\delta\to 0$, puis $\ell\to\infty$.

Enfin, on montre que u vérifie les conditions (R3)–(R5) (*voir* [4] pour les détails).

3. Le résultat d'unicité

Nous pouvons déduire un résultat d'unicité de solution renormalisée du problème (1) moyennant certaines hypothèses plus exigeantes sur les données, outre que (H1)–(H5), à savoir

(H6) $a:(s_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ est lipschitzienne sur les compacts de $(s_0,+\infty)$;

(H7) $\int_{s_0}^0 a(s)\,\mathrm{d}s=+\infty$;

(H8) $(g(x,s_1)-g(x,s_2))(s_1-s_2)>0$, p.p.t. $x\in\Omega$, pour tout $s_1,\ s_2,\ s_1>s_2>s_0$, et $g(x,0)\in \mathrm{L}^1(\Omega)$;

(H9) il existe $\sigma>N$ tel que $w\in \mathrm{L}^\sigma(\Omega)^N$ et $\nabla\cdot w=0$ dans Ω.

THÉORÈME 2. – *On suppose les hypothèses* (H1)–(H3), (H6)–(H9). *Soient* $f_1,f_2\in \mathrm{L}^1(\Omega)$ *et* u_1,u_2 *solutions renormalisées correspondantes aux seconds membres* $f_1,\ f_2$ *respectivement. Alors,*

$$u_i>s_0\quad \textit{p.p.t. } x\in\Omega,\quad A(u_i)\in \mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega),\quad \nabla A(u_i)=a(u_i)\nabla u_i,\quad i=1,2, \tag{3}$$

où $A(s)=\int_0^s a(t)\,\mathrm{d}t$, *et l'on vérifie le principe de comparaison suivant*

$$\int_\Omega \bigl|g(x,u_1)-g(x,u_2)\bigr|\leqslant\int_\Omega|f_1-f_2|. \tag{4}$$

En particulier, si l'on suppose en plus (H4) (*ou bien* (H4)$'$), *le problème* (1) *admet une unique solution renormalisée.*

Schéma de la démonstration. – En utilisant (H7) on démontre (3). En posant alors $z_i=A(u_i)$, $i=1,2$, on montre que, pour $z=z_1,\ z_2$ on a

$$T_j(z)\in \mathrm{H}_0^1(\Omega),\quad \forall j>0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\{|z|\leqslant n\}}C(z)\nabla z\nabla z=0,$$

avec $C(z)=B_2+B_1/a(A^{-1}(z))$, et

$$\int_\Omega w\nabla z h(z)v/a\bigl(A^{-1}(z)\bigr)+\int_\Omega C(z)\nabla z\nabla v h(z)+\int_\Omega C(z)\nabla z\nabla z h'(z)v+\int_\Omega g(z)h(z)v=\int_\Omega f h(z)v,$$
$$\forall h\in \mathrm{W}_\mathrm{c}^{1,\infty}(\mathbb{R}),\ \forall v\in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap \mathrm{L}^\infty(\Omega).$$

Nous pouvons montrer alors qu'on peut appliquer le principe de comparaison de [5,6], ce qui donne (4).

Remarque 5. – On pourra consulter quelques résultats dus à Redwane [8] similaires á ceux qui sont présentés ici, le terme de diffusion non linéaire étant différent.

Remarque 6. – Les résultats enoncés dans les théorèmes 1 et 2 restent valables pour $N = 1$; dans ce cas là, on démontre alors que $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et $a(u)\nabla u \chi_{\{u>s_0\}} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

Remerciements. Ce travail a été partiellement supporté par le Ministerio de Educación y Cultura, projet PB98-0583.

Références bibliographiques

[1] Blanchard D., Redwane H., Sur la résolution d'un problème quasi linéaire à coefficients singuliers par rapport à l'inconnue, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 325 (1997) 1263–1268.
[2] Boccardo L., Gallouët T., Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data, J. Funct. Anal. 87 (1989) 149–169.
[3] Boccardo L., Gallouët T., Giachetti D., Murat F., Existence of a solution for a weaker form of a nonlinear elliptic equation, in: Recent Advances in Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems, Notes in Math., Vol. 208, Longman, Harlow, 1989.
[4] García Vázquez C., Ortegón Gallego F., On a nonlinear elliptic problem with singular diffusion and right hand side in L^1, (en préparation).
[5] Gómez Mármol M., Estudio matemático de algunos problemas no lineales de la mecánica de fluidos incompresibles, Universidad de Sevilla, Tesis Doctoral, 1998.
[6] Gómez Mármol M., Ortegón Gallego F., Existencia y unicidad de solución renormalizada para la ecuación de Kolmogórov, Actas de la Jornada Científica en homenaje al Prof. Antonio Valle Sánchez, Secretariado de Publicaciones, Universidad de Sevilla, 1997.
[7] Murat F., Soluciones renormalizadas de EDP elípticas no lineales, Publications du laboratoire d'analyse numérique, Université Paris-VI, 1993.
[8] Redwane H., (en préparation).