

Universidad de **Cádiz**

Proyectos de fin de carrera de **Ingeniería Técnica Naval**

**Aplicación del método de los elementos finitos al estudio de vibraciones en vigas empleadas en construcción naval**

**Pablo CÉSPEDES CALDERÓN**



Centro: **E. U. I. T. NAVAL**  
Titulación: **I. T. NAVAL**  
Fecha: **Octubre 2006**





## ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS NAVALES POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS CON SOFTWARE

El método de elementos finitos constituye en la actualidad una herramienta habitual para desarrollar diferentes tipos de problemas en computador, con lo cual se ha logrado estudiar eficientemente el comportamiento de una embarcación, tanto estática como dinámicamente, y con esto tener la capacidad de predecir concentración de tensiones, deformaciones, frecuencias naturales y modos de vibración de partes específicas de la estructura.

Con la alta competitividad de los astilleros del mundo, la reducción de tiempo y costo en el diseño naval es fundamental para desarrollar proyectos de cualquier envergadura y con este método se logra una agilización continua en el proceso de ingeniería básica de un proyecto. Sin embargo las aplicaciones a estructuras navales particulares no son comunes en los astilleros.

### 1. EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El método de elementos finitos es un método numérico cuya aplicación sirve para calcular comportamientos de estructuras de ingeniería. Puede emplearse para obtener desviaciones, esfuerzos, vibraciones, comportamientos de flujo, entre otros fenómenos; en los cuales la geometría de la estructura o la complejidad de las cargas aplicadas, hacen imposible obtener una solución analítica del problema. En este método, una estructura compleja se divide en muchos y pequeños bloques simples, llamados elementos finitos, de los cuales puede describirse su conducta (de un elemento individual) con un set relativamente simple de ecuaciones, así como también un set de elementos puede unirse para construir una estructura compleja, de esta forma se describe la conducta de los elementos individuales en un set relativamente grande de ecuaciones, que representan la conducta de la estructura completa. He aquí en donde queda de manifiesto la importancia de los computadores, ya que estos son capaces de resolver un número considerable de ecuaciones simultáneas y entregar una solución de los elementos por separado.

#### 1.1 Fundamentos Teóricos

Los conceptos teóricos básicos de las herramientas de cálculo mediante el MEF, representan problemas físicos que pueden ser expresados mediante alguna de las siguientes ecuaciones:

$$[K]\{q\} = \{f\} \quad (1)$$

$$[C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\} \quad (2)$$

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\} \quad (3)$$

donde

$[K]$ : matriz de rigidez,

$[M]$ : matriz de masa,

$[C]$ : matriz de amortiguamiento,

$\{q\}$ : es el vector de desplazamientos nodales.

$\{\dot{q}\}$ : es el vector de velocidades nodales.

$\{\ddot{q}\}$ : es el vector de aceleraciones nodales.

$\{f\}$ : es el vector de fuerzas externas.

En general el MEF puede resumirse dentro de los siguientes pasos:

1°.- A partir de la realidad física de la estructura, sus apoyos y tipos de carga que actúen sobre ella, es necesario primeramente seleccionar un modelo matemático apropiado para describir el comportamiento de la estructura. También hay que definir con detalle las propiedades mecánicas de los materiales y el carácter de la deformación de la misma (pequeños o grandes desplazamientos, análisis estático o dinámico, etc.) Asimismo, para el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio, se hará uso de las diferentes teorías establecidas.

2°.- Una vez seleccionado el modelo matemático se procede a discretizar la estructura en porciones no intersectantes entre sí denominadas "elementos finitos", dentro de los cuales se interpolan las variables principales en función de sus valores en una serie de puntos discretos del elemento denominados "nodos". Los elementos se conectan entre sí por nodos situados en sus contornos. Esta etapa de discretización constituye una parte esencial de la fase de preproceso que incluye la representación gráfica de la malla de elementos finitos.

3°.- A partir de las teorías para el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio se obtendrán las matrices de rigidez  $\mathbf{K}(e)$  y el vector de cargas  $\mathbf{f}(e)$  para cada elemento.

4°.- Se procede a ensamblar las matrices de rigidez y el vector de carga elemental en la matriz de rigidez global de toda la malla de elementos finitos  $\mathbf{K}$  y el vector de cargas sobre los nodos  $\mathbf{f}$ , respectivamente.

5°.- El sistema de ecuaciones resultante  $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$  se resuelve para calcular las variables incógnitas (desplazamientos de todos los nodos de la malla)  $\mathbf{q}$ , utilizando uno, cualquiera, de los métodos conocidos para la solución de ecuaciones algebraicas simultáneas lineales.

6°.- Una vez calculados los movimientos nodales se pueden calcular las deformaciones y, seguidamente, las tensiones en cada elemento, así como las reacciones en los nodos con movimientos prescritos.

7°.- Obtenidos los resultados, la etapa siguiente es la interpretación y presentación de los mismos.

### 1.1 Etapas de Aplicación

La estructura básica de los programas de aplicación del elemento finito al cálculo directo de estructuras, consta de tres módulos principales:

**Pre-proceso:** etapa en la cual se define el problema a resolver mediante las siguientes etapas:

*Selección del Tipo de elemento finito*, dentro de las librerías de los software se encuentra una gran variedad de tipos de elementos uni-, bi- y tridimensionales, con los cuales simulamos barras, vigas, cáscaras, placas, y elementos sólidos, etc. (Fig. 1).

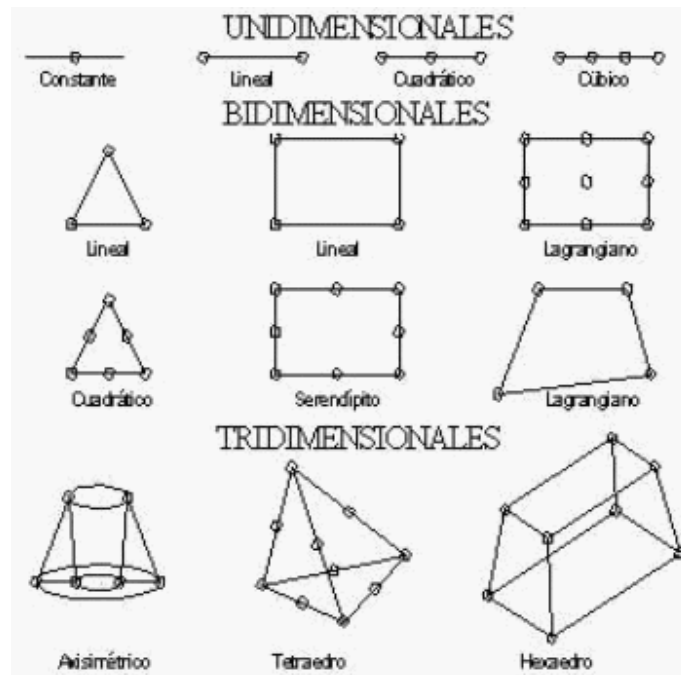


Fig.1. Tipos de elementos.

*Selección de las características geométricas y mecánicas del material*, en esta etapa son asignados alturas, momentos de inercia, espesores, áreas transversales, módulos de elasticidad, coeficiente de poisson, etc, para cada tipo de elemento que del modelo.

*Creación de la geometría del modelo*, debe representar lo más fielmente al modelo físico en estudio, obligando a la herramienta informática en uso a presentar facilidad de generación de geometrías complejas tales como partes curvas del casco, en general todo parte de la base de generar una serie de puntos (nodos) que componen el modelo, definido en un sistema de coordenadas ya establecido, para posteriormente generar superficies y luego sólidos, dependiendo del modelo, ya que en algunos casos basta solo con superficies.

**Solución:** Durante la fase de solución se asigna el tipo de análisis aplicado a la estructura, las condiciones de contorno del modelo, las cargas aplicadas, y por último se procede a resolver los sistemas de ecuaciones resultantes de la etapa anterior. Dentro de los tipos de análisis podemos destacar:

*Análisis estático*, determina desplazamientos, tensiones, deformaciones, etc. en la estructura analizada.

*Análisis modal*, incluye la determinación de frecuencias naturales y modos de vibración.

*Análisis armónicos*, usado para determinar la respuesta de una estructura sometida a cargas que varían armónicamente en el tiempo.

*Análisis de pandeo*, usado para calcular cargas críticas y deformaciones debidas a pandeo.

En el caso de las condiciones de contorno, éstas son restricciones de desplazamientos y rotaciones que se aplican a la matriz de rigidez completa resultante, la cual relaciona las cargas aplicadas al sólido elástico con los desplazamientos.

**Post-proceso:** La etapa de post-proceso e interpretación de los resultados numéricos obtenidos en la etapa de solución es de gran importancia, ya que no necesariamente los resultados obtenidos son correctos. Dentro de la función del ingeniero, la acertada interpretación de la enorme cantidad de información que entregan las herramientas informáticas será preponderante a la hora de diferenciar un buen diseño de otro realizado deficientemente.

La aplicación correcta del MEF requiere de:

- Desarrollar una estrategia global para la creación del modelo,
- Tener un conocimiento a priori de la estructura a analizar,
- Comparar el comportamiento de la estructura idealizada con el comportamiento esperado de la estructura real.

## **FÉ DE ERRATAS**

Por error las dimensiones de la viga se dieron en centímetros cuando obviamente habrían de haber sido dadas en milímetros, por lo que los resultados no son los correctos. Aún así, deseo pueda servir como referencia a los interesados en la materia.



## INDICE

---

1. JUSTIFICACIÓN.....	5
2. ANTECEDENTES .....	12
3. OBJETIVOS.....	18
4. MATERIAL Y MÉTODOS .....	19
4.1 Predicción de vibraciones en buques.....	19
4.1.1 Introducción.....	19
4.1.2 Fuentes de excitación.....	20
4.2 Metodología de análisis por el método de los elementos finitos en un buque .....	27
4.2.1 Introducción.....	27
4.2.2 Un poco de historia.....	29
4.2.3 Características del buque Ferry .....	30
4.2.4 Modelo dinámico del buque .....	32
4.2.5 Etapas del análisis.....	33
4.3 Modelo matemático unidimensional de un elemento tipo viga .....	38
4.3.1 Introducción.....	38
4.3.2 Modelo matemático unidimensional .....	40
4.3.2.1 Fuerzas internas .....	40
4.3.2.2 Modelo de flexión: Teoría de Euler-Bernoulli .....	48
4.4 Fundamentos del Método de los Elementos Finitos.....	56
4.4.1 Introducción.....	56
4.4.2 Introducción al método de los elementos finitos.....	57
4.5 Introducción a la teoría de las vibraciones mecánicas.....	74
4.5.1 Introducción.....	74
4.5.2 Teoría de vibraciones .....	74
4.5.3 Vibración libre.....	75
4.5.4 Vibración armónica forzada no amortiguada .....	77
4.5.5 Vibraciones forzadas amortiguadas.....	79
4.5.6 Sistemas distribuidos .....	81
4.5.6.1 Ecuación de onda.....	81
4.5.6.2 Vibración transversal de vigas uniformes .....	84
5. RESULTADOS: Aplicación del método de los elementos finitos al análisis dinámico de una viga .....	88
5.1 Introducción.....	88
5.2 Modos y frecuencias naturales en una viga .....	89
6. DISCUSION.....	103
7. CONCLUSIONES.....	110
8. ANEXOS.....	113
ANEXO 1 Construcción de diagramas de cortante y momento .....	113



E.U.INGENIERÍA TÉCNICA NAVAL  
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS AL ESTUDIO DE  
VIBRACIONES EN VIGAS DE CONSTRUCCIÓN NAVAL  
AUTOR: PABLO CÉSPEDES CALDERÓN

---

ANEXO 2	Módulo de inercia .....	117
ANEXO 3	Ecuaciones diferenciales lineales.....	120
ANEXO 4	Cavitación .....	124
ANEXO 5	Vano de popa y timón .....	125
ANEXO 6	Fuentes excitadoras .....	126
ANEXO 7	Masa añadida .....	127
ANEXO 8	Bibliografía .....	128

## 1. JUSTIFICACIÓN

Desde el punto de vista constructivo, los buques ferry cuentan con unas particularidades que los hacen únicos; la más significativa es la bodega de carga de vehículos que, por razones prácticas, debe ser un espacio lo suficientemente diáfano como para permitir a todo tipo de vehículos, grandes o pequeños, maniobrar en su interior. Se caracteriza por la ausencia total de mamparos transversales en los entrepuentes o cubiertas superiores. La función de soportar los esfuerzos sobre costados y doble fondo es asumida por anchos y espaciados puntales acoplados con cuadernas transversales con vagras a proa y popa. Además, se tiene en cuenta lo siguiente: Las áreas de acomodación incluyen grandes espacios abiertos con grandes tramos de vigas y provisión de mamparos limitado. Esto es típico de muchos ferries actuales, y un problema desde el punto de vista del control de la vibración. De igual modo, dado que se prevé que estos refuerzos estén sometidos a cargas localizadas, por el tránsito de cargas y vehículos, se debe poner énfasis en el proyecto de estos elementos estructurales, que denominaremos de ahora en adelante *elementos tipo viga*.

Los datos del buque ferry objeto de estudio de esta memoria son:

188.3 metros de eslora total.

170 metros de eslora entre perpendiculares.

28.7 metros de manga.

6 metros de calado.

9.0 metros de altura a la cubierta principal.

7000 toneladas de peso muerto.

22 nudos de velocidad en servicio.

Por otra parte, desde la perspectiva de la tripulación y el confort de los pasajeros, el ruido y las vibraciones han estado en el primer puesto de la lista desde hace muchos años. Las demandas sobre confort de Armadores y Sociedades de Clasificación son cada vez más exigentes, y en los últimos años ha aumentado el interés por obtener los niveles de ruidos y vibración apropiados en buques tipo ferry. En la actualidad, el límite inferior requerido por la normativa ISO-6954 es de 4mm/s (0-p) y el “Comfort Class” requerido en algunos cruceros es de 3mm/s (0-p).

Los efectos de las vibraciones en buques pueden ser muy variados, originando no solo incomodidad en las personas, sino también daños en la estructura, maquinaria y equipos del buque. Si las vibraciones producen grietas en las soldaduras de la estructura, éstas pueden dar lugar a la rotura de un miembro estructural. Asimismo, el funcionamiento de ciertas máquinas puede dar lugar a averías en otras máquinas cuando se desarrollan vibraciones con niveles excesivos. Estas averías pueden producirse en piezas o en instrumentos de vigilancia y control que pueden quedar fuera de servicio si se sobrepasan ciertos niveles vibratorios, con el consiguiente daño para la instalación.

El estudio de las vibraciones, por tanto, supone una gran carga de trabajo para los Astilleros, Empresas de Ingeniería, y Sociedades de Clasificación actualmente y su investigación ha sido principalmente encauzada al desarrollo de nuevos métodos y herramientas de predicción.

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales es posible resolver, aproximadamente, complejos problemas matemáticos de integración, diferenciación, resolver sistemas de ecuaciones y encontrar raíces de ecuaciones, por medio del simple uso de

operaciones aritméticas. Ya que casi todos los procesos físicos se pueden representar matemáticamente mediante ecuaciones o algún conjunto de ecuaciones, es por lo tanto posible resolver problemas complicados con técnicas numéricas.

Dentro de los métodos numéricos existe una gran variedad de estos, dependiendo de la aplicación que tiene el método y del concepto del que se parte para hacer la simplificación, es decir, cambiar el problema complejo por una serie de operaciones aritméticas.

El método de elemento finito es un método numérico, que surgió como tal en la década de los 60, desde entonces a la fecha ha pasado de ser una herramienta novedosa a necesaria tanto a nivel académico como industrial. Se le ha aplicado en casi todos los campos del saber con éxito, alcanzando sus mayores aplicaciones en el campo de la ingeniería. El éxito del método también se debe al surgimiento de computadoras más rápidas y con mayor capacidad de almacenamiento y manejo de datos, aunado al desarrollo de programas especializados.

El mayor riesgo de vibración en un buque se produce cuando una de las frecuencias propias de la estructura coincide con una de las de las fuentes excitadoras, lo que puede provocar una amplificación excesiva de estos niveles. Por tanto, una primera fase del estudio de las vibraciones de un buque por parte del astillero, es conocer los modos y frecuencias naturales de la estructura.

La aplicación que en este trabajo se expone es la de encontrar los **modos y frecuencias naturales** de un longitudinal de una cubierta perteneciente a la habilitación sometida a vibración transversal por el método de los elementos finitos. Un modo de vibración es un patrón o forma característica en el que vibrará un sistema mecánico. La vibración de una viga es siempre una combinación o una mezcla de

todos los modos de vibración. Pero no todos están excitados al mismo grado. Por ejemplo, si se toca una campana suavemente, lo primero que se va a oír es el modo fundamental de vibración, pero si se la toca más fuerte, otros modos son excitados y se oyen los parciales superiores del tono.

Cuando sobre un sistema, una viga en nuestro caso, no existen cargas aplicadas y el amortiguamiento se supone despreciable, la ecuación de equilibrio dinámico se reduce a la ecuación de la vibración natural del sistema, en el cual las fuerzas de internas de la estructura (elásticas o no) equilibran en cada instante a las fuerzas de inercia.

$$[M]\{\ddot{\delta}(t)\} + [K]\{\delta(t)\} = \{0\}$$

Esta es la ecuación de la que se obtienen las frecuencias y modos naturales. Pero para ilustrar el M.E.F, es más sencillo en primer lugar considerar el estudio de la ecuación de equilibrio estático, que se estudiará detalladamente durante el proyecto.

Como primera aproximación la viga puede considerarse simplemente apoyada en sus extremos, y sus dimensiones<sup>1</sup> las obtuve de uno de los perfiles normalizados del catálogo de AutoCAD 2006, programa que utilicé durante 2 meses como becario en una empresa de delineación en cooperación con empresas como Dragados offshore y Navantia, y en la que tuve que trabajar con diversos planos de secciones de buques. Sus características son:

---

<sup>1</sup> El cálculo para cualquier longitud, sección, densidad, etc. supondría simplemente el cambio de la constante correspondiente. Por tanto, las modificaciones en el modelo se harían de forma directa e inmediata.



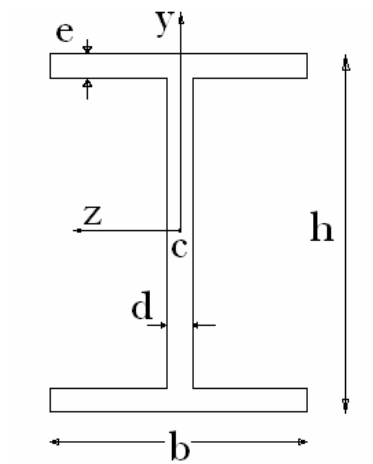
E.U.INGENIERÍA TÉCNICA NAVAL  
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS AL ESTUDIO DE  
VIBRACIONES EN VIGAS DE CONSTRUCCIÓN NAVAL  
AUTOR: PABLO CÉSPEDES CALDERÓN

---

- Viga de acero de longitud  $L= 4$  metros apoyada sobre transversales. ( $E$ =Módulo de Young= $2.1 \cdot 10^{10}$  Kg/m<sup>2</sup>,  $\rho$ =Densidad del acero= $7,85$  Ton/m<sup>3</sup>).



- Corresponde a un perfil normalizado para construcción naval HE-600 de sección transversal doble T. Sus dimensiones son:



$$h=600\text{cm}$$

$$b=300\text{cm}$$

$$e=35\text{cm}$$

$$d=25\text{cm}$$

El programa utilizado para resolver las ecuaciones es *Mathematica*, creado por la empresa *Stephen Wolfram* y es una herramienta de cálculo numérico y simbólico, visualización y manipulación de datos, gráficos y objetos. *Mathematica* tiene más de dos millones de usuarios y permite generar gráficos complejos de cálculos matemáticos. El programa ha sido

E.U.INGENIERÍA TÉCNICA NAVAL  
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS AL ESTUDIO DE  
VIBRACIONES EN VIGAS DE CONSTRUCCIÓN NAVAL  
AUTOR: PABLO CÉSPEDES CALDERÓN

---

usado para tareas tan diversas como diseñar el velódromo para las Olimpiadas de Atlanta 96, calcular la velocidad de flujo de diferentes shampoos según los ingredientes de su fórmula y determinar cómo evolucionan los tsunamis al acercarse a la costa. Según la empresa de Wolfram, el programa se utiliza en 90 países. Es usado tanto por Ingenieros, científicos, analistas financieros, investigadores, profesores y estudiantes de enseñanza superior.

Para finalizar, esta memoria está redactada siguiendo la estructura de proyecto tipo B, propia de los trabajos científicos:

1. Justificación
2. Antecedentes
3. Objetivos
4. Material y métodos
5. Resultados.
6. Discusión.
7. Conclusiones.
8. Anexos.

Bibliografía:

1. Jesús Monclús. “Con el coche a flote”. Revista Automovilística “Autoclub”.
2. Antonio Barrios G. “Apuntes de Cálculo de Estructuras Marinas”. E.U de Ingeniería técnica naval, Departamento de construcciones navales, Cádiz, 1983.
3. *Noise and vibration*. Faster ferries and environmental noise restrictions cause additional problems for the noise and vibration experts; Active versus Passive noise control. Marine engineers review, 2000, -pp. 21-25.
4. Ulrik Moller Rasmussen, anders Riis Sorensen, Vibration Assessment and Local Vibration Analysis Ro-Ro Passenger Vessels, Odegaard & Danneskiold-Samsoe A/S, Astillero Españoles, S.A, Puerto Real, 1997.

## 2. ANTECEDENTES

- Orígenes Ingeniería naval
- Época Empírica
- Vibraciones
- Buques ferry

La construcción naval no tiene un origen conocido. Puede suponerse que los pueblos asentados en las costas, y probablemente antes los insulares, se sirvieron del mar y navegaron por él desde sus primeros tiempos.

La navegación costera es consubstancial del modo de vida de los pueblos ribereños. En algún momento los pescadores y navegantes debieron sentir la curiosidad de llegar más allá del horizonte, o bien les llegaron noticias de más allá, o fueron arrastrados por vientos y corrientes. En ese momento se debió modificar el tipo de embarcación costera, para navegar en alta mar: al menos se requerían más fortaleza, mayor habitabilidad y más seguridad, con bordas más altas y defensas de intemperie; y seguramente con mejor propulsión. Los constructores de aquellas embarcaciones las usaban para su propio negocio y beneficio, y no cabe duda de que en ellas ponían toda su técnica y su esmero, ya que su vida dependía de ellas a menudo.

E.U.INGENIERÍA TÉCNICA NAVAL  
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS AL ESTUDIO DE  
VIBRACIONES EN VIGAS DE CONSTRUCCIÓN NAVAL  
AUTOR: PABLO CÉSPEDES CALDERÓN

---

Las primeras evidencias arqueológicas del uso de barcos se remontan a 50 o 60.000 años atrás en Nueva Guinea.

En el Antiguo Egipto hay evidencias de que ya se conocían las técnicas para ensamblar maderas planas para formar un casco, ensamblándolas con espigas de madera y Brea para calafatear. El desarrollo de la navegación en tiempos greco-romanos llevó a la construcción de amplios trirremes y quinquirremes.

En la edad media, la navegación sufrió un retroceso que no se recuperó hasta el siglo XV cuando nuevos barcos (Urna) y la reactivación de las rutas comerciales marítimas impulsó de nuevo el viaje por mar.

En la época de los descubrimientos, estos nuevos modelos, creados para surcar el báltico y el mediterráneo fueron sustituidos por galeones y carabelas, ideadas para las travesías oceánicas, pasando la actividad marítima y los astilleros a la costa atlántica (Londres). Hasta el siglo XVII no empezaron las primeras construcciones en metal, mientras que los materiales plásticos y los compuestos de fibra de vidrio o fibra de carbón con resinas epoxi empezaron en el siglo XX.

La historia de la Ingeniería Naval nace con la necesidad de darle un soporte técnico-científico a la creciente complejidad de las naves, y evoluciona a partir de las rigurosas exigencias actuales de confort y seguridad a bordo de los buques, especialmente en el estudio de las vibraciones. No sería exacto decir que el arte con el que se habían proyectado y construido los barcos desde hacía cientos o miles de años, haya sido sustituido por una ciencia. Pero desde hace unos siglos se sintió la necesidad de un acercamiento científico al buque y su entorno, ya que la artesanía por sí sola era incapaz de explicar y evitar las catástrofes y hundimientos de buques.



Puede decirse que el astrónomo italiano Galileo Galilei (1564-1642), inició lo que suele llamarse la edad de la razón en el análisis estructural. Aparentemente fue el primero en estudiar la resistencia de los sólidos a la ruptura y puede decirse que originó la mecánica de los materiales. Así mismo, se encuentra un comienzo lógico en la obra de Galileo (1564-1642), para el estudio de la dinámica y de la vibración. A la edad de veinte años, en 1584, Galileo concibió correctamente el principio del péndulo isócrono. En 1657, el matemático holandés Huygens (1629-1695), aplicó ese principio a un reloj. En 1590, Galileo coronó sus realizaciones en la física experimental con el descubrimiento y la prueba de la ley de los cuerpos descendentes. Su trabajo sobre el movimiento y la aceleración fue la base para las leyes del movimiento formuladas por Sir Isaac Newton (1642-1727).

Uno de los hombres de ciencia más notables de Oxford, Robert Hooke (1635-1703), estudió la elasticidad de los materiales y llegó en 1660 a la ley que hoy lleva su nombre. Como resultado de sus estudios, inventó el resorte espiral que sustituyera al péndulo de los mecanismos de relojería; no obstante, Hooke no aplicó su ley a problemas de ingeniería. En 1680, Edme Mariotte (1654-1684) desarrolló independientemente esa misma ley, y la aplicó a las fibras de una viga; observando que unas fibras se alargan y otras se acortan y que lo hacen respecto a un eje a la mitad de la altura de la sección... el eje neutro.

El problema de Galileo (viga en voladizo cargada con su peso propio y con peso adicional) vuelve a ser estudiado por el suizo James Bernoulli (1654-1705), quien supone que una sección plana de una viga, permanece plana durante la flexión..., aunque no llegó a una solución satisfactoria debido a que no dio importancia a lo que hoy conocemos como eje neutro. En 1717 Johann Bernoulli (1667-1748), hermano de James, enunció *el principio de los desplazamientos virtuales*, que es el método que aún hoy empleamos en la determinación de las

E.U.INGENIERÍA TÉCNICA NAVAL  
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS AL ESTUDIO DE  
VIBRACIONES EN VIGAS DE CONSTRUCCIÓN NAVAL  
AUTOR: PABLO CÉSPEDES CALDERÓN

---

deflexiones elásticas en las estructuras; posteriormente, su hijo Daniel Bernoulli (1700-1782), estudia el problema de la determinación de la curva elástica de barras flexionadas, e interesa a su amigo Leonhard Euler (1707-1783), en la determinación de las elásticas en vigas y columnas, y hace aportaciones valiosísimas sobre el pandeo de columnas y que aún hoy también se siguen utilizando.

Durante este período otros autores realizaron interesantes contribuciones al estudio de la flexión en vigas y a la teoría de estructuras, así como también se lograron adelantos sobresalientes en la teoría de la elasticidad.

El ingeniero Barrè de Saint-Venant (1797-1886) fue probablemente el más grande ingeniero de elasticidad; eran de admirarse su alto grado de habilidad matemática y su visión esencialmente práctica que imprimía una dirección precisa a su trabajo. En 1855 presentó sus famosas memorias que trataban el problema de la torsión y en 1856 las relativas a la flexión; en las que por primera vez se consideran correctamente los esfuerzos de corte en las secciones transversales de vigas, allí también se discutían problemas de impacto y vibración.

Respecto al estudio de la vibración, durante doscientos años todo interés quedó confinado al del periodo del péndulo, de los cuerpos astronómicos y mareas y a las perturbaciones observadas en los mismos. Pero a fines del siglo diecinueve, la maquinaria de alta velocidad introdujo muchos nuevos problemas, que incluían los fenómenos actualmente asociados con vibración mecánica. El barón John William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919), organizó y desarrolló la teoría de la vibración mecánica, y en ésta su contribución se funda el campo moderno.

Con el avance de las Matemáticas y la Física, se comenzó a estudiar científicamente el buque. Pero los tiempos en los que el ensayo y error

E.U.INGENIERÍA TÉCNICA NAVAL  
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS AL ESTUDIO DE  
VIBRACIONES EN VIGAS DE CONSTRUCCIÓN NAVAL  
AUTOR: PABLO CÉSPEDES CALDERÓN

---

eran el método para comprender el comportamiento mecánico de los materiales, han quedado sólo en los anales de la historia; porque este esfuerzo y dedicación que los grandes cerebros han dedicado en estos casi cuatrocientos años, aunados a las modernas técnicas del análisis experimental de esfuerzos y a los métodos matemáticos modernos como el del elemento finito, nos permiten contar con una base técnico-científica capaz de realizar los prodigios ingenieriles de nuestra época.

Actualmente, además del progreso de la tecnología, se beneficia y a él contribuye de forma única, la construcción naval militar del Siglo XX; la competencia constructora internacional, la estrategia de las naciones, la rentabilidad del comercio marítimo y el aprovechamiento de los recursos oceánicos, la creación de nuevos materiales y vehículos noveles configuran el campo de la Ingeniería Naval y Oceánica en estos tiempos.

En la actualidad Navantia ha firmado el contrato de dos buques Ro-Ro. Son los mayores buques de carga rodada que se construyen en la actualidad. Los nuevos buques Roll-on- Roll-of se adecuan a las Normativas y protocolos en vigor más exigentes, en relación con la seguridad y la Preservación ambiental, disponiendo de la mayor capacidad de carga rodada del mercado. Estos nuevos buques serán construidos por Navantia en los astilleros de la Bahía de Cádiz y sus entregas tendrán lugar en noviembre de 2008 y abril de 2009.

Corría el año 1851 cuando el que es hoy considerado primer trasbordador de Europa, el *Firth of Forth*, comenzó a funcionar en Escocia para cruzar uno de los ríos más caudalosos del país, y llevando en su interior no automóviles, sino trenes. Había nacido un nuevo modo de transporte que no ha dejado de crecer desde entonces.

Uno de los aspectos a destacar de estos nuevos buques Roll-on- Roll-of de última generación a construir, es su adecuación a las normativas y

E.U.INGENIERÍA TÉCNICA NAVAL  
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS AL ESTUDIO DE  
VIBRACIONES EN VIGAS DE CONSTRUCCIÓN NAVAL  
AUTOR: PABLO CÉSPEDES CALDERÓN

---

protocolos en vigor más exigentes, en relación con la seguridad y la preservación ambiental (pinturas ecológicas libres de estaño, motores diseñados para bajas emisiones de NOX y bajo consumo específico de combustible y lubricante, economizadores gases escape, agentes refrigerantes ecológicos, plantas potabilizadoras, depuradoras de aguas residuales, alumbrado de bajo consumo, bajas emisiones acústicas, cierres hidráulicos ecológicos).

**Bibliografía:**

1. Prof. Francisco Fernández González. Capítulo: "La construcción y la arquitectura naval". Libro: "Historia de la Ingeniería en España". ETSI navales. Universidad politécnica de Madrid.
2. Prof. Aurelio Guzmán Canañas y Prof. Pedro Gallardo Mateo. Libro: "Teoría del buque". Departamento de construcciones navales. E.U de Ingeniería técnica naval. Cádiz.
3. Profesor Rafael F. Camacho Morales: "Apuntes de Introducción al análisis experimental de esfuerzos mediante extensómetros eléctricos", Instituto tecnológico de la Paz, Mexico.
4. Revista Trimestral de Acciona, N°33, Verano 2006,-p,22.

### 3. OBJETIVOS

Se enumeran a continuación los objetivos:

- Introducir convenientemente el método de los elementos finitos al análisis de estructuras.
  
- Analizar la metodología del estudio del riesgo de vibración en un buque por medio del M.E.F.
  
- Describir las posibles fuentes de excitación y la importancia de evitar los fenómenos de resonancia.
  
- Obtener las ecuaciones diferenciales de gobierno que describen el comportamiento estático o dinámico de una estructura.
  
- Realizar un estudio general de las vibraciones de una viga.
  
- Aplicar el M.E.F al análisis de frecuencias y modos de vibración naturales de una viga.
  
- Estudiar el grado de aproximación del método de El Elemento Finito respecto a la solución real del problema.



## **4. MATERIAL Y MÉTODOS**

### **4.1 Predicción de vibraciones en buques**

#### **4.1.1 Introducción**

En la actualidad existe un creciente interés en averiguar los niveles de vibración en Buques tipo ferry. Las características constructivas y las exigencias en materia de confort a bordo de estos buques lo explican.

La viga-buque puede experimentar variaciones cíclicas horizontales y verticales, y torsión. Del mismo modo, la parte de popa de la superestructura podría ser también susceptible a vibraciones longitudinales. Las principales fuentes de estas variaciones se deben a las excitaciones provocadas por la hélice, el motor, y los efectos del mar.

En efecto, un buque puede ser considerado como una estructura flexible susceptible de sufrir vibraciones. Las particulares formas de vibración experimentadas, dependen del tipo de buque, de las excitaciones presentes, la forma de construcción, y la región considerada. De igual modo, las amplitudes de vibración del casco dependen de las variaciones de las fuerzas de excitación y de momentos, las relaciones dinámicas entre las frecuencias armónicas de excitación y las frecuencias naturales de la estructura, la localización del motor y las condiciones de carga.

Puesto que los buques tienden a construirse cada vez más ligeros, y por lo tanto más flexibles, el riesgo de vibración en el casco está cada vez más presente. Para minimizar este gran problema de riesgo de vibración es necesario por tanto, conocer y controlar la influencia de las fuentes de excitación existentes, las frecuencias naturales de la estructura e intentar evitar posibles fenómenos de resonancia.

#### 4.1.2 Fuentes de excitación

Para poder controlar estos posibles fenómenos de resonancia, es fundamental conocer en primer lugar las fuentes de excitación que se producen en la estructura de un buque. Estas se pueden dividir en:

- a. La hélice.
- b. El motor principal
- c. Los motores auxiliares
- d. Los efectos del mar

##### A. Excitaciones debidas a la acción de la hélice

Las excitaciones hidrodinámicas debidas a la acción de la hélice en el campo no homogéneo de la estela pueden dividirse en tres grupos:

Esfuerzos sobre la hélice

Esfuerzos sobre la superficie del casco

Esfuerzo sobre el timón

Los *esfuerzos sobre la hélice* actúan sobre el eje de cola y la línea de ejes y da origen a:

- Vibraciones laterales o de precesión (remolinos)
- Vibraciones torsionales
- Vibraciones axiales

Los *esfuerzos sobre la superficie del casco* son debido a las variaciones de la presión hidrodinámica que actúa sobre la parte sumergida de la popa del casco del buque y del conjunto del timón, en las proximidades de la hélice que vienen generados por el paso de las palas sobre aquél,

recogiendo los efectos de la carga sobre la pala, la cavitación<sup>2</sup> y el comportamiento dinámico de la cavitación, que producen fluctuaciones de presión en las planchas del casco.

Los valores de estas pulsaciones hidrodinámicas conducen al conocimiento de las fuerzas y momentos que se producen en la superficie del casco y que actuando directamente sobre el forro exterior y transmitidos a través de los elementos de acero de la estructura son origen del segundo tipo de excitaciones de vibración del casco.

Los *esfuerzos sobre el timón*, con un origen similar al de las excitaciones de la presión sobre el casco, excitan a éste al aplicarse sobre los cojinetes del timón.

Las excitaciones debidas a la acción de la hélice se transmiten a la estructura del casco por intermedio:

- De variaciones de presión hidrodinámica
- De variaciones de las reacciones de los cojinetes de la línea de ejes
- De variaciones de empuje y de par

#### Efectos hidrodinámicos

Las variaciones de presión hidrodinámica que se producen a consecuencia de la hélice es función de:

- La geometría de la hélice.
- Las formas de carena de la parte de popa del buque<sup>3</sup>.
- La forma del timón.

---

<sup>2</sup> Ver Anexo 4

<sup>3</sup> Ver anexo 5

- Los valores de las distancias que quedan ente la hélice y la obra viva del casco y del timón.

#### Efectos de las variaciones de las reacciones en los cojinetes de la línea de eje

Las variaciones de las reacciones en los cojinetes de la línea de eje son función de:

- Los esfuerzos, fuerzas y pares laterales inducidos en el eje porta-hélice al funcionar la hélice dentro del campo no uniforme de la estela.
- Las condiciones de alineación estática de la línea de ejes.
- La relación entre los valores de las frecuencias propias  $F_t$ , de las vibraciones laterales del conjunto constituido por la hélice y la línea de ejes y los valores de las frecuencias de excitación producidas por la hélice.

Los esfuerzos procedentes de la hélice afectan a los valores de las reacciones e incluso pueden llegar a anularlos.

Las hélices engendran en el eje porta-hélice variaciones del momento vertical, lo que constituye una causa fundamental de variación de las reacciones en los cojinetes-apoyo.

#### Efecto de las variaciones del empuje y el par

Vibraciones longitudinales del conjunto constituido por:

- La hélice.
- La línea de ejes.

- El eje y la chumacera de empuje y los polines de esta última.
- La estructura del doble fondo, en la que están empotrados los polines de empuje.
- El eje del aparato propulsor.

El origen de estas excitaciones está en las variaciones de par resistente y de empuje provocadas por el funcionamiento de la hélice en el campo no uniforme de la estela.

Las hélices engendran variaciones de par y de empuje; estas variaciones son causa de vibraciones de torsión y de vibraciones longitudinales del conjunto propulsivo.

#### B. Excitaciones debidas al funcionamiento del motor

Una de las principales fuentes de excitación son las fuerzas de inercia de los motores principales.

Los motores producen principalmente vibraciones locales.

Estas excitaciones actúan sobre la estructura del casco y pueden dividirse en tres categorías:

- Excitaciones verticales.
- Excitaciones transversales.
- Excitaciones longitudinales.

#### Excitaciones verticales

Estas excitaciones, que se transmiten a la estructura del casco a través de la estructura del doble fondo, están originadas por:

- Las fuerzas y los pares libres exteriores del motor principal.

- Las vibraciones de los cigüeñales.
- Las vibraciones de torsión del motor según el segundo modo vibratorio.

#### Excitaciones transversales

Estas excitaciones están provocadas por las vibraciones transversales del conjunto constituido por el motor principal y la estructura del doble fondo de la sala de máquinas. Están originadas por las componentes transversales del efecto de combustión, que actúan sobre las deslizaderas del motor, conjuntamente con el de las irregularidades del par motor. Dichos efectos provocan vibraciones transversales, sean paralelas, del conjunto del motor alrededor de un eje instantáneo de rotación que, en principio, suele estar situado en la estructura de sus polines.

El conjunto del motor y de sus polines puede ser considerado como una viga que trabaja en voladizo; las frecuencias propias de este conjunto dependen de las características elásticas de sus diferentes elementos.

#### Excitaciones longitudinales

Estas excitaciones que proceden del motor principal y repercuten en la estructura del casco, resultan de las vibraciones longitudinales del conjunto constituido por:

- El cigüeñal.
- El eje y la chumacera de empuje y por sus polines.
- La estructura del doble fondo, en la que están empotrados los polines de la chumacera de empuje.
- La línea de ejes y la hélice.

En el origen de estas excitaciones se encuentran las vibraciones longitudinales del conjunto constituido por el cigüeñal que, a su vez, son debidas a los efectos de combustión y a los efectos de elasticidad del cigüeñal.

### C. Excitaciones debidas a los efectos del mar

Los efectos del mar que pueden dar lugar a la aparición de vibraciones son la ola y los golpes de mar.

#### Efecto de la ola

La acción de la ola puede manifestarse de dos maneras diferentes. En primer lugar, las variaciones de desplazamiento y de presión hidrodinámica que resultan de ella, y que se ejercen a todo lo largo de la eslora del buque, pueden dar lugar a una vibración notable del conjunto de la viga-buque, especialmente si las sollicitaciones debidas a la ola se producen con una frecuencia que difiera poco de una de las frecuencias propias de casco. Tales vibraciones de la viga-buque pueden hacer vibrar ciertos elementos de la estructura.

Se estudian dos tipos de fenómenos:

- a) La vibración excitada por un tren continuo de olas.
- b) La respuesta transitoria de un tren corto de olas.

#### Efectos de los golpes de mar

Se denomina golpes de mar todas las acciones del mar que provoquen sacudidas transitorias del casco, tanto si estas resultan del golpeteo de la roda con las olas, del “slamming” o de masas de mar que caigan sobre la cubierta.

Las sacudidas citadas crean un aumento transitorio del nivel de energía del casco, que se disipa esencialmente en forma hidrodinámica y en forma vibratoria, haciendo que la estructura vibre con sus frecuencias propias. Tales vibraciones se amortizan y desaparecen en algunos segundos.

En el anexo número 6 se recoge un esquema de las fuentes de excitación del buque, que resume todo el tema.

#### Bibliografía:

1. Molinier Pappalardo Matías Maximiliano: Predicción de vibraciones. Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ingeniería, Dpto. Ingeniería Naval, 2005.
2. *Cases, causes and cures*. Marine engineers review, August 1998, - pp,31-32.



## **4.2 Metodología de análisis por el método de los elementos finitos en un buque**

### **4.2.1 Introducción**

La investigación sobre vibraciones en el casco y en la maquinaria de un buque ferry o de cualquier otro tipo supone una gran carga de trabajo para los Astilleros, Empresas de Ingeniería, y Sociedades de Clasificación en la actualidad. La presencia de ruidos y desperfectos estructurales debido a vibraciones, puede hacer inhabitable el buque para tripulación y pasajeros, o provocar roturas de equipos o elementos estructurales, con el coste que ello supone.

Entre los casos que la experiencia aporta sobre este asunto, se encuentran, por ejemplo, los excesivos niveles de vibración en zonas de acomodación, roturas en tanques, y grietas en polines. Otro caso recogido fue el de las quejas expresadas por los residentes cercanos a la terminal de un buque crucero, debido al tono característico que este desprendía.

Mientras la ISO (Internacional Standards Organisation) ha realizado criterios para cubrir los niveles de vibración en los espacios de acomodación de los buques (ISO 6954), para los correspondientes motores (ISO 10816-1, y ISO10816-6), y para los generadores (ISO8258-9 y ISO10816-3), la mayoría de sociedades de clasificación han establecidos sus propias directrices para la medida, informe y evaluación de la vibración.

Desde esta perspectiva, el ruido y las vibraciones han estado en el primer puesto de la lista desde muchos años. Desde entonces las contramedidas pueden ser más eficientemente aplicadas durante la fase de diseño del buque, y su investigación ha sido principalmente encauzada al desarrollo de nuevos métodos y herramientas de predicción.

El objetivo de la metodología de predicción mediante el Método de los Elementos Finitos, es poder disponer de un modelo matemático, en algunos caso basado en la resolución de más de 650.000 ecuaciones, que permita, de la forma más precisa posible, reproducir ó simular el comportamiento dinámico real del buque o de determinadas zonas. Es decir, obtener sus frecuencias propias *globales* o *locales*: cubiertas, mamparos, etc; y las formas de vibración asociadas a cada una de ellas.

La aplicación a este modelo matemático de las fuerzas excitadoras procedentes de las fuentes excitadoras principales: hélice y motor, permite obtener una distribución en zonas del buque de los niveles de vibración previstos. La comparación entre estos niveles previstos con los límites establecidos por requerimiento del Armador en la Especificación contractual, llevará o bien a finalizar el proceso, ó en caso contrario a, mediante un proceso iterativo, introducir ó simular modificaciones estructurales ó de otro tipo en el modelo matemático hasta lograr niveles de acuerdo a Especificación. Una vez contrastada la eficacia de estas modificaciones en el modelo, deberán introducirse lo más fielmente posible en el sistema real: buque.

En la Figura se describe gráficamente el Diagrama de Flujo correspondiente a esta metodología.



#### 4.2.2 Un poco de historia

Corría el año 1851 cuando el que es hoy considerado primer transbordador de Europa, el Firth of Forth, comenzó a funcionar en Escocia para cruzar uno de los ríos más caudalosos del país, y llevando en su interior no automóviles, sino trenes. Había nacido un nuevo modo de transporte que no ha dejado de crecer desde entonces. El primer ferry “moderno” para vehículos comenzó a funcionar en Dover en 1953. Por

aquel entonces los automóviles tenían que ser izados con grúas y depositados en las bodegas de buques fundamentalmente de carga. Este lento y complicado proceso de embarque debió disuadir a no pocos turistas y automovilistas a la hora de planear sus vacaciones haciendo uso de su automóvil particular. De hecho, tras la puesta en marcha de los ferries en Dover, el número de vehículos que atravesaron el Canal de la Mancha se multiplicó por diez sólo en el primer año. En la actualidad son aproximadamente cinco millones los vehículos que utilizan alguno de los ferries que zarpan o arriban a este puerto inglés.

#### **4.2.3 Características del buque Ferry**

Un transbordador o “ferry” es un buque que realiza un recorrido normalmente fijo de ida y vuelta entre dos puertos de mar y que es capaz de transportar simultáneamente a los pasajeros y sus vehículos. El tipo de ferry más popular recibe en el argot técnico el nombre de “ro-ro” (ROLL-ON/ROLL-OFF) y su característica fundamental es que se trata del propio pasajero o automovilista quien conduce su vehículo dentro y fuera de las bodegas correspondientes (de ahí su nombre: la carga entra RODando y sale RODando).

Por definición, el buque Ro-Ro está proyectado principalmente para el manejo de cargas rodadas, ya se trate de autos, remolques, pallets, y/o contenedores, etc. Su característica fundamental es el movimiento horizontal de la carga.

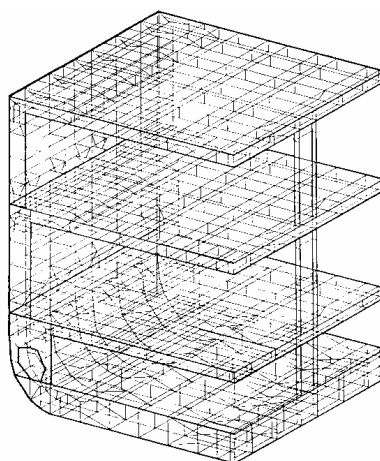
Cualquier diseño del acceso roll-on/roll-off debe cumplir con los requisitos de rapidez en puerto y de flexibilidad y polivalencia en las cargas rodadas. Una manera de incrementar la rapidez de movimiento de carga, consiste en establecer un sentido único de carga y otro independiente de descarga. Esto se lleva a cabo en los servicios de ferry,

E.U.INGENIERÍA TÉCNICA NAVAL  
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS AL ESTUDIO DE  
VIBRACIONES EN VIGAS DE CONSTRUCCIÓN NAVAL  
AUTOR: PABLO CÉSPEDES CALDERÓN

---

con accesos en proa y en popa, estableciéndose en proa la carga y en popa la descarga.

Desde el punto de vista constructivo, los transbordadores cuentan también con unas particularidades que los hacen únicos; la más significativa es, precisamente, la bodega de carga de vehículos que, por razones prácticas, debe ser un espacio lo suficientemente diáfano como para permitir a todo tipo de vehículos, grandes o pequeños, maniobrar en su interior. Se caracteriza por la ausencia total de mamparos transversales en los entrepuentes o cubiertas superiores. En cualquier caso el papel principal de estos mamparos transversales es el de servir de sostén a los esfuerzos por deformación a causa del mar en la estructura del buque, y no de soportar los esfuerzos sobre costados y doble fondo, pues esta es asumida por anchos y espaciados puntales acoplados con cuadernas transversales del tipo de las esloras de cajón con vagras a proa y popa. Debido a esto, las luces de los refuerzos bajo cubierta serán significativamente mayores. De igual modo, dado que se prevé que estos refuerzos estén sometidos a cargas localizadas, por el tránsito de cargas y vehículos, se debe poner énfasis en el proyecto de estos elementos estructurales.



El puntal de la mayoría de los buques roll-on/roll-off está directamente en función de los requerimientos internos de estiba, y muy especialmente

adaptado a los standards establecidos en las alturas de trailers y bateas. De todas formas siempre se establece unas condiciones algo superiores a las medidas mínimas, y muy especialmente en cuanto a las consideraciones sobre resistencia longitudinal de tale cubiertas.

La necesidad de disponer de un espacio diáfano entra en colisión con una de las medidas básicas de seguridad en cualquier buque: la compartimentación o división de las diferentes cubiertas en compartimentos que puedan sellarse en caso de emergencia para contribuir a la estabilidad y garantizar la flotación en caso de entrada de agua en la embarcación. Los transbordadores son a menudo barcos muy altos, ya que la bodega de vehículos debe situarse por encima de la línea de flotación; las cubiertas de pasajeros normalmente están todavía más altas que la bodega de vehículos. La altura de estos barcos exige también que los medios de evacuación cuenten con complejos y, sobre todo, rápidos sistemas de rescate: salvavidas que pueden lanzarse al mar en cualquier posición, toboganes de lona para evacuar a los pasajeros desde las cubiertas hasta los botes o balsas. También el tipo de carga de los transbordadores -vehículos de todos los tipos y tamaños- requiere de medidas especiales para poder evitar y controlar incendios y movimientos de la carga en el interior de las bodegas.

#### **4.2.4 Modelo dinámico del buque**

La creación del modelo dinámico del buque, requiere disponer de toda la documentación disponible del buque. Teniendo en cuenta los datos de partida que permitirán la creación del modelo matemático que simula dinámicamente al buque, su fiabilidad y la de las acciones correctas que se deriven, están condicionadas a la fiabilidad de los datos de partida.

Una de las claves para una predicción “fiable” de los niveles de vibración en buques, es el conocimiento “cuantitativo” y “cualitativo” de

las excitaciones capaces de inducir niveles de vibración apreciables a cierta distancia de los focos ó fuentes excitadoras.

En este apartado de la selección de las fuentes excitadoras principales: hélice y motor, viene a ponerse de relieve la gran importancia que tiene el que el Astillero se haya “sensibilizado” con la Predicción de Vibraciones desde las etapas tempranas del proyecto. Ello supondría que éste, debería diseñar sus suministros de forma tal que las excitaciones procedentes de los mismos estén dentro de valores recomendables. De lo contrario el Astillero deberá asumir, por una parte, el riesgo de no poder cumplir con la Especificación y por otro lado, el sobre coste que supone diseñar dinámicamente el buque para absorber unas excitaciones principales por encima de valores recomendados.

#### **4.2.5 Etapas del análisis**

Con todos los datos anteriores disponibles, las fases o etapas del estudio son las siguientes:

1.-Análisis de frecuencias propias y modos de buque.- En esta fase, con las dimensiones características del buque y mediante cálculos aproximados ó estadísticas de buques similares, se procede a la obtención de los primeros modos de flexión vertical, transversal y de torsión del buque-viga.

Dependiendo de la posición relativa entre estas frecuencias propias del buque-viga y las excitaciones principales, se decidirá ó no, en la fase de anteproyecto, la instalación de mamparos transversales ó longitudinales así como la conveniencia de instalar compensadores de momentos en el motor principal.

## 2.-Análisis de modos locales en superestructuras.

En esta etapa, entre otros, se desarrollan los siguientes pasos:

- Modelización, mediante Elementos Finitos de áreas ó zonas representativas del buque: cubiertas de acomodación, mamparos, etc..
- Cálculo de las frecuencias propias y modos de vibrar de estas estructuras, en un rango entre 0 y 25 Hz, que cubra suficientemente el rango de frecuencias excitadoras principales: primer y segundo armónico de frecuencia del paso de pala y excitaciones principales de motor principal.

Para evitar los problemas de resonancia, se procura que las frecuencias naturales calculadas no deberían coincidir con el doble de la frecuencia de paso de la hélice.

- Análisis de resultados, que permiten, por comparación entre frecuencias propias y frecuencias excitadoras, identificar posibles **fenómenos de resonancia**.
- Establecimiento, si proceden, de las modificaciones estructurales oportunas para minimizar el riesgo de altos niveles de vibración por resonancia, separando suficientemente, entre un 15-20%, frecuencias propias locales de frecuencias excitadoras.

Al igual que en la fase anterior, esta etapa debe desarrollarse en la fase de anteproyecto cuando se disponga de los planos preliminares de acero.

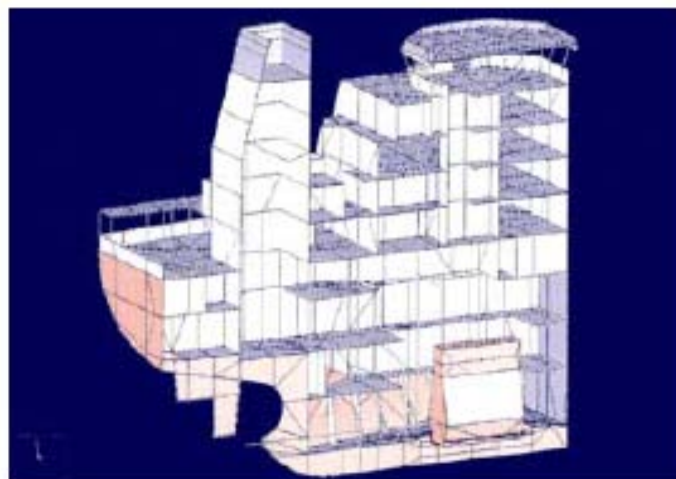
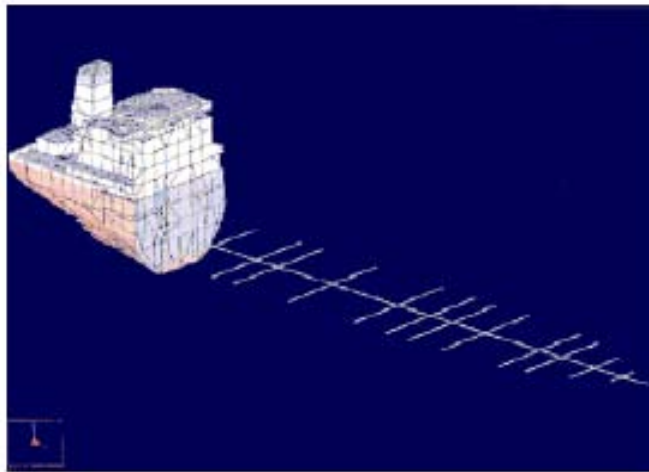
. Como dato importante, y en fase temprana, el desarrollo de esta etapa permitirá comprobar si la estructura, dimensionada estáticamente, es adecuada o no desde el punto de vista “dinámico”.



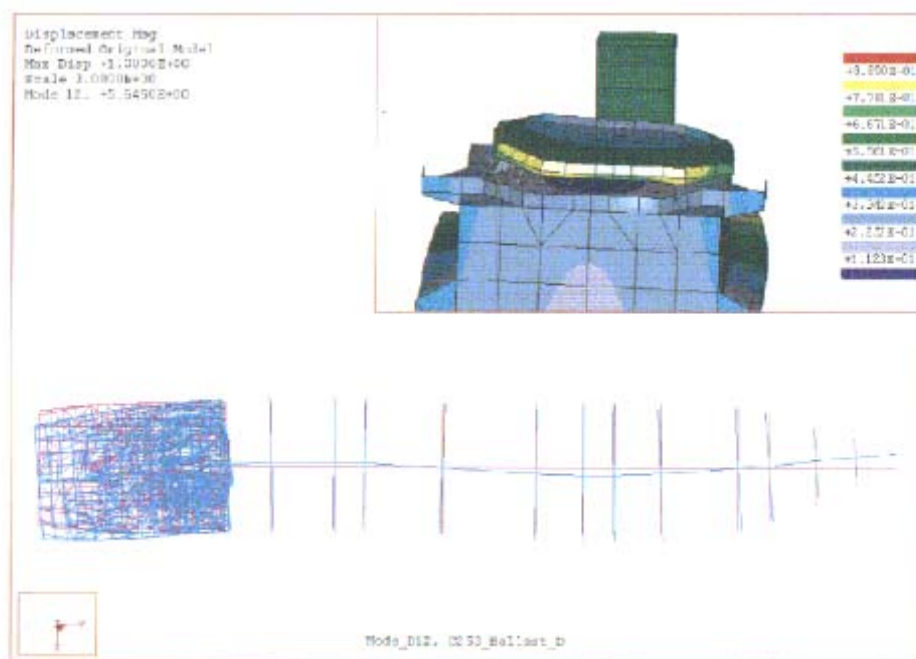
3.- Análisis dinámico del buque completo. Respuesta forzada.

En esta fase, con el buque mucho más definido, se procede a desarrollar los siguientes pasos:

- Modelización mediante Elementos Finitos del buque en conjunto – Modelo Completo-.



- Cálculo dinámico del buque completo, obteniendo frecuencias propias y modos correspondientes de buque-viga (que deberán adaptarse por masa de agua arrastrada<sup>4</sup>) y frecuencias y modos locales.
- Predicción de niveles de vibraciones en todo el buque mediante el Análisis de Respuesta Forzada.
- Comparación de niveles de vibración previstos con los límites de la Especificación, estableciendo si proceden, las modificaciones estructurales oportunas para lograr el cumplimiento con la Especificación.



---

<sup>4</sup> Ver anexo 7

Bibliografía:

1. D. Publio Beltrán Palomo: Jornadas sobre industrias, servicios e infraestructura para el transporte marítimo de pasajeros, cruceros y turismo de recreo en el mediterráneo. Técnicas y servicios de ingeniería S,L, Barcelona, 2001.
2. Francisco Piniella Corbacho: Roll-on/Roll-off: (El buque abierto)/, Universidad de Cádiz, Cádiz, 1993.
3. Jesús Monclús. “Con el coche a flote”. Revista Automovilística “Autoclub”.
4. *Cases, causes and cures*. Marine engineers review, August 1998, - pp, 31-32.

## **4.3 Modelo matemático unidimensional de un elemento tipo viga**

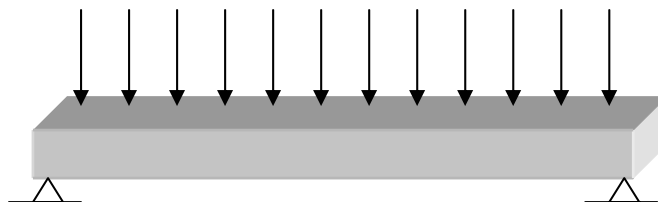
### **4.3.1 Introducción**

La estructura de un buque ferry se caracteriza por la ausencia total de mamparos transversales en los entrepuentes o cubiertas superiores. La función de soportar los esfuerzos sobre costados y doble fondo es asumida por anchos y espaciados puntales acoplados con cuadernas transversales con vagras a proa y popa. Debido a esto, las luces de los refuerzos bajo cubierta serán significativamente mayores. De igual modo, dado que se prevé que estos refuerzos estén sometidos a cargas localizadas, por el tránsito de cargas y vehículos, se debe poner énfasis en el proyecto de estos elementos estructurales.

Las cubiertas de un buque, como se ha dicho, son estructuras reforzadas por baos y esloras o longitudinales, es decir, están constituidas por una malla de barras o refuerzos dispuestos en dos direcciones diferentes, normalmente perpendiculares. A estos se le denomina “emparrillados”.

Una primera introducción al cálculo de emparrillados puede hacerse considerando dos refuerzos dispuestos perpendicularmente unidos en sus puntos medios. Cada una de las vigas podría ser estudiada independientemente considerándolas apoyadas en sus extremos y sometidas a la combinación de dos cargas: una carga uniformemente distribuida a lo largo de su longitud, y una carga concentrada en su centro igual al efecto de la ligadura de una viga con la otra en el punto de intersección que actuará hacia abajo en una viga y hacia arriba en la otra.

A estos elemento que forma parte de un emparrillado o estructura reticulada se le denominan elementos tipo viga, y son aquellos que tiene dos de sus dimensiones mucho menores que la otra y recibe cargas en el sentido perpendicular a la dimensión mayor.



La principal ventaja de los elementos de viga es que son geoméricamente simples y tienen pocos grados de libertad, con lo que el estudio del comportamiento de una estructura con este tipo de elementos puede resultar más sencillo que realizando una modelización tridimensional.

Pero en las estructuras navales el problema se complica por el hecho de que los refuerzos están unidos a las planchas del costado, fondos, cubiertas, mamparos, etc. La dificultad está en que la plancha forma parte integrante de los dos conjuntos de vigas que la refuerzan.

Modernamente el desarrollo de nuevos métodos de cálculo, como el cálculo matricial o el método de los elementos finitos y la ayuda de los computadores, permiten el análisis conjunto de todos los componentes del casco o de grandes zonas del mismo.

El abaratamiento de ordenadores y programas ha contribuido a que la difusión de las herramientas de elementos finitos sea tremenda. Cualquier oficina técnica, por pequeña que sea, las tiene a su alcance. Hay que decir a este respecto que la difusión de las herramientas no siempre se corresponde con la adecuada formación para su uso. Hoy en día resulta relativamente frecuente que se lleven a cabo cálculos por personal que desconoce casi absolutamente los fundamentos del Método de los Elementos Finitos y sus limitaciones y que, por tanto, es incapaz de evaluar la bondad de los resultados que está obteniendo.

Por consiguiente, en esta sección para poder abordar los fundamentos de “el elemento finito” posteriormente, se plantea un análisis estático de un elemento tipo viga apoyado en sus extremos basándonos en la teoría de *Euler-Bernoulli*, tal como la de una viga de un emparrillado de una cubierta. Esto será fundamental para familiarizarnos con los conceptos de condiciones de contorno, ecuaciones usadas para el análisis matricial, o aquellas ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de los elementos.

### **4.3.2 Modelo matemático unidimensional**

A continuación se presenta la determinación de las fuerzas internas de un elemento viga y posteriormente la teoría de la flexión de Euler-Bernoulli. Las posibilidades de apoyos de una viga en sus extremos son diversas: extremos articulados, empotrados o apoyados, en el que cada uno posee una restricción determinada de grados de libertad. Deseando no ser excesivamente espesos en los cálculos, compruébese que hemos tomado como condiciones de borde una viga biapoyada en los extremos, tal como se considera para una primera aproximación al análisis de longitudinales perteneciente a un emparrillado de cubierta.

#### **4.3.2.1 Fuerzas internas**

Sabemos que las fuerzas internas involucran tres incógnitas: una fuerza axial, una fuerza cortante y un momento, por lo tanto conociendo las fuerzas de extremo y aplicando el método de las secciones en cualquier punto de la viga nos daría como resultado un tramo de viga estáticamente determinado con tres ecuaciones estáticas disponibles y tres incógnitas por determinar. Observemos que la clave es conocer las fuerzas de extremo de elemento, es decir, aquellas que se ejercen en las uniones con los otros elementos pertenecientes al sistema estructural y de ahí proceder a determinar las fuerzas internas por la estática. Podemos concluir que el elemento a analizar es estáticamente determinado, así pertenezca a un sistema indeterminado.

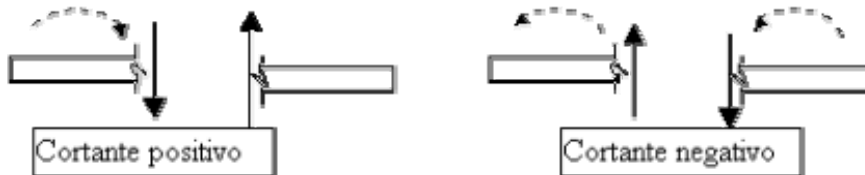
Teniendo en cuenta estas consideraciones aislamos nuestro elemento tipo viga, consideramos sus fuerzas extremas como fuerzas de reacción y lo analizamos hasta encontrar las fuerzas internas:



Notemos que al partir el elemento, una sección ejerce sobre la otra fuerzas equivalentes a un apoyo de empotramiento, podemos decir, que las conexiones que se generan a lo largo del elemento son uniones rígidas y las fuerzas en cada sección son iguales y de sentido contrario.

Para el estudio de los elementos tipo viga se utiliza la siguiente convención:

Cortante: Las fuerzas cortantes positivas son aquellas que producen una rotación horaria del elemento.



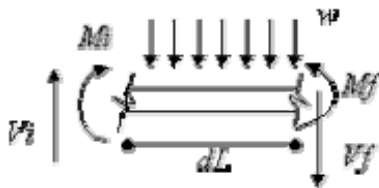
Momento: Los momentos positivos son aquellos que producen concavidad hacia arriba en el elemento horizontal o tracciones en la fibra inferior. Para elementos verticales esta convención se puede complicar un poco por lo tanto regiré el criterio de dibujar el diagrama de momentos para la cara traccionada.



Fuerza axial: Se considera una fuerza axial positiva cuando ella implica tracción en el elemento.

Relación entre momento, cortante y carga

Se puede encontrar una relación con las fuerzas internas de cortante y momento por medio del siguiente análisis de una **sección infinitesimal** del elemento.



Aplicando **equilibrio** a la sección de viga indicada tenemos:

$$\sum F_y = V_i - V_f - w \cdot dL = 0$$

$$V_i - V_f = w \cdot dL \Rightarrow \Delta V = -w \cdot dL$$

integrando a ambos lados, tenemos:

$$\int_{n_1}^{n_2} \Delta V = \int_{n_1}^{n_2} -w \cdot dL$$

La variación del cortante en un tramo de viga dado es igual al área bajo la curva de carga. Dividiendo por  $dL$  a ambos lados tenemos:

$$\frac{\Delta V}{dL} = -w, \text{ donde podemos decir que la pendiente a la curva del}$$

diagrama de cortante es igual al negativo de la carga distribuida.

Ahora con la ecuación de momentos tenemos:

$$\sum M_b = 0 = -M_i + M_f + \frac{w \cdot dL^2}{2} - V_i \cdot dL = 0$$



Considerando una longitud muy pequeña del trozo de viga analizado, el término con  $dL^2$  se aproxima a cero, y la ecuación nos queda:

$$M_f - M_i = V_i \cdot dL \Rightarrow \Delta M = V_i \cdot dL$$

Integrando:

$$\int_{x_2}^{x_1} \Delta M = \int_{x_2}^{x_1} V_i \cdot dL$$

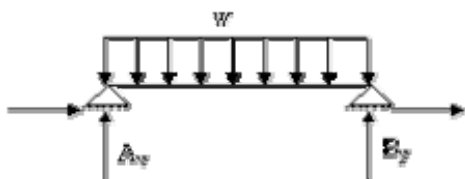
donde la segunda integral representa el área bajo la curva del diagrama de cortantes en un tramo de viga dado y podemos concluir que la variación del diagrama de momentos en un tramo de vigas es igual al área bajo la curva del diagrama de cortante.

Dividiendo a ambos lados por  $dL$ , tenemos:

$$\frac{\Delta M}{dL} = V_i$$

donde la pendiente del diagrama de momentos en cualquier punto es igual al valor del cortante en ese punto.

#### Viga simplemente apoyada con una carga distribuida uniformemente



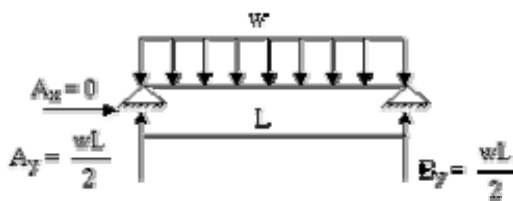
Tomaremos el ejemplo de un elemento simple, con fuerzas de extremo equivalentes a uniones de articulación, y hallaremos los diagramas de momento y corte<sup>5</sup>:

---

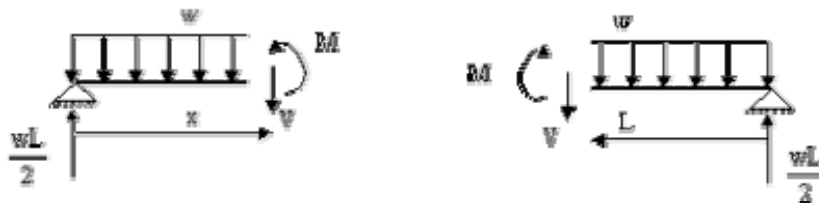
<sup>5</sup> Ver Anexo 1

Se debe partir por encontrar las fuerzas de extremo del elemento y se recalca que el elemento, así pertenezca a un sistema estructural compuesto, debe estar en equilibrio estático, cumplir con las ecuaciones de equilibrio, considerando tanto las fuerzas de extremo o unión al sistema como las fuerzas externas actuando sobre él.

- Fuerzas de reacción:



- Fuerzas internas: Aplicación del método de las secciones.



$$\sum F_v = \frac{wL}{2} - wx - V = 0$$

$$V = \frac{wL}{2} - wx \rightarrow$$

Notemos que el término  $wL/2$  es la sección en el extremo izquierdo del elemento, por lo tanto este se puede expresar como  $V = A_y - wx$ ; que sería una función lineal.

Por otro lado:

$$\sum M = M_{ext} + \frac{wx^2}{2} - \frac{wL}{2}x = 0$$

$$M_{int} = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

$$M_{int} = A_y x - \frac{wx^2}{2}$$

Determinemos ahora el valor del momento máximo considerando que este se presenta cuando el cortante es cero (siempre una pendiente igual a cero muestra los puntos máximos y mínimos de una curva).

$v=0$  cuando  $x = \frac{V_a}{w}$ , reemplazando en la ecuación de momentos

tenemos:

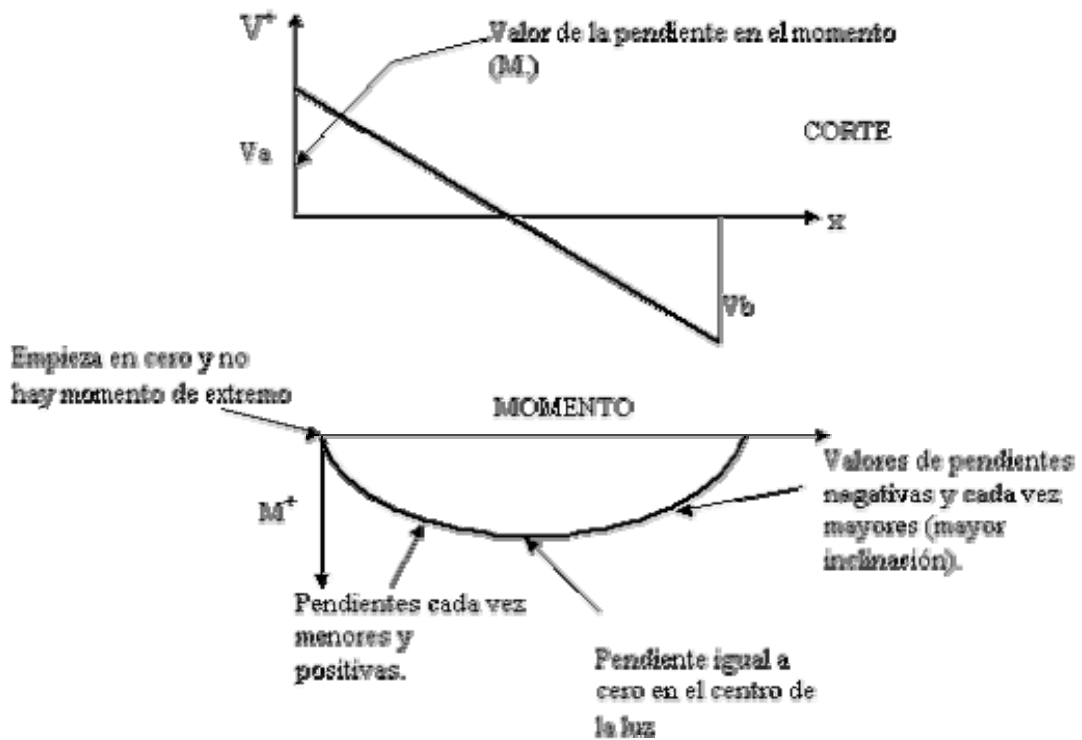
$$M_{int}^{max} = V_a \cdot x - \frac{wx^2}{2}$$

$$M_{int}^{max} = V_a \cdot \frac{V_a}{w} - \frac{w}{2} \frac{V_a^2}{w^2} = \frac{V_a^2}{2w}$$

$$M_{int}^{max} = \frac{V_a^2}{2w} \quad \text{para} \quad V_a = \frac{wL}{2}$$

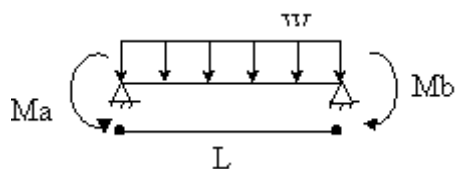
$$M_{int}^{max} = \frac{wL^2}{8}$$

Por tanto el diagrama de cortante y momentos quedaría así:



**Puntos críticos en un diagrama de momentos:**

Asumiendo que el elemento estudiado pertenece a un sistema estructural complejo, analizaremos una viga con momentos en ambos extremos que representan la unión con otros elementos o su continuidad después de un apoyo.



E.U.INGENIERÍA TÉCNICA NAVAL  
 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS AL ESTUDIO DE  
 VIBRACIONES EN VIGAS DE CONSTRUCCIÓN NAVAL  
 AUTOR: PABLO CÉSPEDES CALDERÓN

L	Luz del elemento		
W	Carga distribuida, w		
Ve	$\frac{wL}{2}$	$\frac{wL}{2}$	Cortante estático debido a la carga w. Se denomina estático porque se calcula como si el elemento no tuviera continuidad.
Vh	$\left(\frac{Ma - Mb}{L}\right)$	$\left(\frac{Mb - Ma}{L}\right)$	Cortante hiperestático. Debido a los momentos de unión o continuidad. El signo depende de los valores de los momentos pero siempre deben formar un par de fuerzas.
Vtotal	$Ve + Vh$	$Ve + Vh$	
M-	Ma	Mb	Momentos de continuidad, por lo general para cargas distribuidas hacia abajo producen momentos negativos o lo que es lo mismo, tracciones en la fibra superior. En caso de columnas se debe analizar bien el signo
M+	$\frac{V_a^2}{2w} - Ma$	$\frac{V_b^2}{2w} - Mb$	Momento máximo, si los momentos de continuidad son muy grandes y la carga es pequeña no alcanza a dar valores positivos. Calculando por ambos lados debe dar el mismo valor
PI	$\frac{V_a \pm \sqrt{V_a^2 - 2wMa}}{w}$	$\frac{V_b \pm \sqrt{V_b^2 - 2wMb}}{w}$	Puntos de inflexión

#### 4.3.2.2 Modelo de flexión: Teoría de Euler-Bernoulli

La teoría de la flexión en vigas se fundamenta en los conceptos de equilibrio, compatibilidad y leyes constitutivas:

Condiciones de equilibrio.- Las fuerzas que actúan en los extremos de cada pieza deben ser tales que mantengan ésta en equilibrio. Además, la resultante de las fuerzas en los extremos de todas las barras que concurren en un nudo cualquiera debe ser igual a la carga exterior aplicada en dicho nudo.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum M = 0$$

Ley de hooke.- Las fuerzas actuando en los extremos de cada barra y los movimientos de dichos extremos deben satisfacer las ecuaciones deducidas del diagrama tensión-deformación del material de que está formada la barra.

$$F = K\Delta$$

$$M = K\theta$$

K: rigidez a flexión

Condiciones de compatibilidad.- Los movimientos de los extremos de cada barra deben ser compatibles con los de los nudos a los cuales está unida dicha barra.

$$\Delta_1 = \Delta_2 \quad \text{En puntos de contacto} \quad (\Delta = \text{Deformación en un punto})$$

$$\theta_1 = \theta_2 \quad \text{En uniones rígidas} \quad (\theta = \text{Angulo de deformación})$$

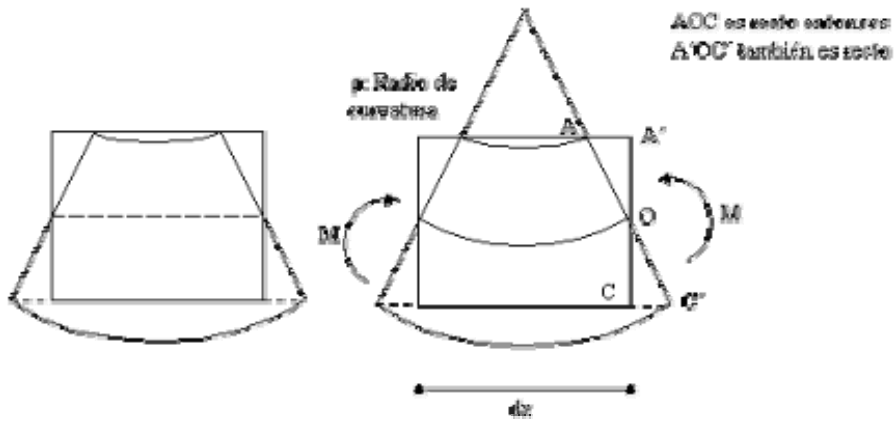
$$\theta = 0 \quad \text{En empotramientos}$$

Las vigas de Euler-Bernoulli, por su parte, no tienen en cuenta la deformación transversal por cortante (como si hace la de Timoshenko), es decir, asumen que las secciones planas perpendiculares al eje de la

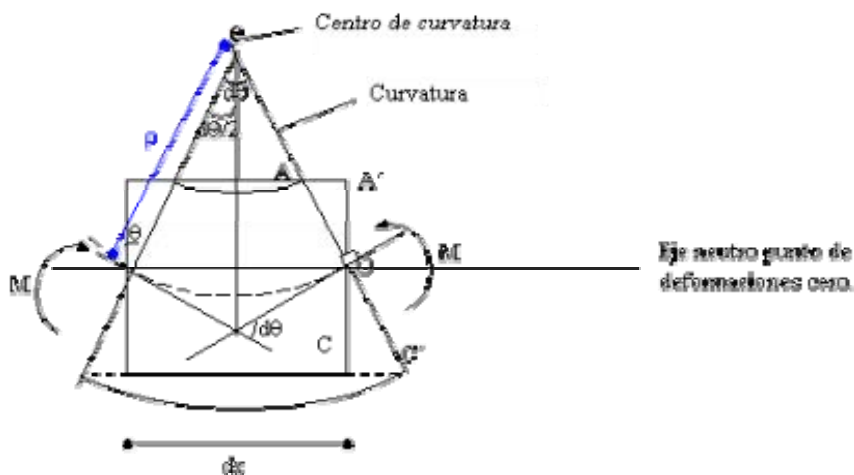
viga permanecen planas y perpendiculares a dicho eje después de la deformación. Deben emplearse solamente para modelizar el comportamiento de vigas esbeltas, en las que las dimensiones de la sección transversal son pequeñas comparadas con la dimensión longitudinal (para vigas normales esto puede ser del orden de 1/15).

Es decir, basándonos en la teoría de Euler-Bernoulli:

1. Una sección plana permanece plana después de la deflexión.  
 (Euler - Bernoulli)



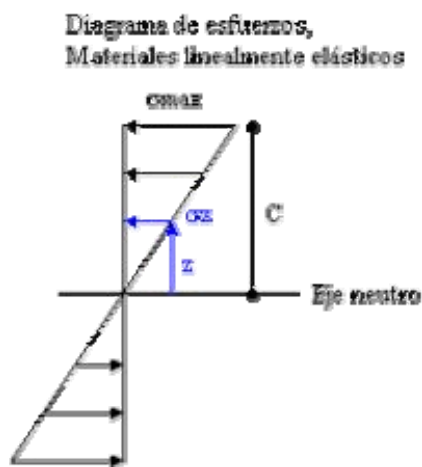
2. La sección plana deformada permanece perpendicular a las fibras de deformación nula (eje neutro)



Con estas dos conclusiones y aplicando los tres tipos de ecuaciones en que se basa la flexión de vigas, podemos encontrar los desplazamientos del eje neutro en función de los momentos internos  $M$ .

- **Ecuaciones de equilibrio interno**

$$\sum M = 0 = M + \int \sigma_x Z dA \Rightarrow M = \int \sigma_x Z dA$$



Pero observando proporcionalidad, vemos que:

$$\frac{\sigma_x}{Z} = \frac{\sigma_{max}}{C}$$

siendo  $C$  el punto de máxima tensión, y/o de mayor

distancia al eje neutro). Luego:

$$M = \int \frac{\sigma_{max}}{C} Z^2 dA = \frac{\sigma_{max}}{C} \int Z^2 dA$$

$$M = \frac{\sigma_{max}}{C} I$$

siendo  $I$  el momento de inercia.



- **Compatibilidad interna**

A continuación observemos el triángulo pequeño de la figura anterior:

$$\frac{d\theta}{2} C = \frac{\Delta L}{2}$$

pero:

$$\frac{\Delta L}{L} = \epsilon = \frac{\Delta L}{dx}$$

$$d\theta \cdot C = \epsilon \cdot dx$$

$$d\theta = \frac{\epsilon \cdot dx}{C}$$

e igualmente para el triángulo grande:

$$\text{Longitud de arco} = \rho d\theta = dx \Rightarrow d\theta = \frac{dx}{\rho}$$

Igualando triángulo pequeño con triángulo grande:

$$\frac{\epsilon}{C} dx = \frac{dx}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_{max}}{C} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_x}{Z}$$

o que es lo mismo la relación de curvatura con la deformación de las fibras internas.

- **Ley de elasticidad**

$$\sigma = \epsilon \cdot E \quad \epsilon z = \frac{\sigma_z}{E} \quad \epsilon_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{E}$$

siendo E el módulo de elasticidad del material de la viga.  
 Reemplazando en compatibilidad interna:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_{\max}}{E C}$$

Reemplazando en equilibrio:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M C}{I E C} \quad (\sigma_{\max} = \frac{M C}{I})$$

que es la relación de la curvatura con las fuerzas internas

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E I}$$

y transformando en la ecuación:

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{E I}$$

que denominaríamos “relación tangente de la curva de deformación con fuerzas internas”.

Falta relacionar la deformación en cada punto “y” con las fuerzas internas;  $y = fn(x)$ . Se demuestra por geometría Diferencial que:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{Relación de curvatura}$$

Considerando que las deformaciones son pequeñas, el término elevado al cuadrado en el denominador se aproxima a cero, y queda:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2};$$

El valor de la pendiente en ese punto es:

$$d\theta = \frac{dy}{dx}$$

y como veíamos anteriormente:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

Por tanto, queda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Ecuación que relaciona deflexión con fuerzas internas.

Por otro lado, como vimos en la sección de fuerzas internas:

$$W = \frac{dV}{dx} \rightarrow \text{Pendiente de la curva de corte}$$

$$V = \frac{dM}{dx} \rightarrow \text{Pendiente de la curva de momento}$$

Entonces si:

$$M = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot EI;$$

y transformando:

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right)$$

y

$$W = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right)$$

Si  $EI = \text{constante}$ ; entonces:

$$W = EI \frac{d^4 y}{dx^4}$$

Esta es la **ecuación diferencial** que describe el equilibrio de una viga sometida a una carga uniforme  $W$  a lo largo de su longitud y apoyada en sus extremos.

Si establecemos que en los límites de la viga el valor de  $y$  sea nulo, dado que en este punto no existe deformación, entonces existen *cuatro* condiciones de frontera (o de contorno) de la viga:

$y(0)=y(L)=y''(0)=y''(L)=0$ ,  
siendo "L" la longitud de la viga.

Bibliografía:

1. M.I. Jesús Alonso Apodaca Espinoza: “Apuntes de Análisis Estructural”. Ingeniería Civil. Universidad de México, 2004.
2. Antonio Barrios G. “Apuntes de Cálculo de Estructuras Marinas. E.U de Ingeniería técnica naval. Cádiz, 1983.
3. Francisco Beltrán: “Teoría general del Método de los Elementos Finitos”. Notas de Clase. Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales. ETS Ingenieros Industriales Madrid. Curso 1998-99.

## **4.4 Fundamentos del Método de los Elementos Finitos**

### **4.4.1 Introducción**

Las limitaciones de la mente humana son tales que no puede captar el comportamiento del complejo mundo que la rodea en una sola operación global. Por ello, una forma natural de proceder de ingenieros o científicos consiste en separar los sistemas en sus componentes individuales, o “elementos”, cuyo comportamiento pueda conocerse sin dificultad, y a continuación reconstruir el sistema original para estudiarlo a partir de dichos componentes.

En muchos casos se obtiene un modelo adecuado utilizando un número finito de componentes bien definidos. A tales problemas los denominaremos *discretos*. En otros, la subdivisión prosigue indefinidamente y el problema sólo puede definirse haciendo uso de la ficción matemática de infinitésimo. Ello nos conduce a ecuaciones diferenciales o expresiones equivalentes con un número infinito de elementos implicados. A tales sistemas los llamaremos *continuos*.

Con el uso de computadoras, los problemas discretos pueden resolverse generalmente sin dificultad, pero como la capacidad de estas es limitada, los problemas continuos sólo se pueden resolver de forma exacta mediante manipulaciones matemáticas.

Para vencer la infranqueabilidad que supone la solución de problemas continuos reales, los ingenieros, se enfrentan al problema creando una analogía entre elementos discretos reales y porciones finitas de un dominio continuo.

El Método de los Elementos Finitos es hoy en día, el procedimiento más potente para el análisis de estructuras de carácter unidimensional, bidimensional o tridimensional sometidas a las acciones exteriores más diversas.

Aunque las estructuras continuas son inherentemente tridimensionales en algunos casos su comportamiento puede describirse adecuadamente por modelos matemáticos unidimensionales o bidimensionales.

La forma más elegante de explicar los fundamentos matemáticos del MEF parte de la teoría de espacios normados y utiliza los conceptos del análisis funcional.

Sin embargo, desde el punto de vista pedagógico, iniciar el estudio del MEF situándose en este marco puramente matemático tiene serios inconvenientes para los técnicos. Se requiere un tiempo y esfuerzo considerable para manejar con soltura estos conceptos.

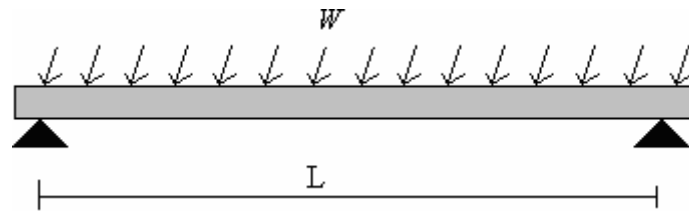
Por tanto, el M.E.F se describirá directamente sobre un caso típico de desplazamiento (como la mayor parte de la bibliografía que pueda encontrarse sobre el método), paso por paso, muy detalladamente, desde el punto de vista técnico, evitando teorías abstractas y alejadas de las aplicaciones prácticas en las que los ingenieros estamos interesados.

#### **4.4.2 Introducción al método de los elementos finitos**

El problema consiste en hallar los desplazamientos de una viga apoyada en sus extremos cargada uniformemente a lo largo de su longitud. La ecuación de equilibrio de una viga cargada uniformemente con una carga distribuida  $W$  y apoyada en los extremos, tal como vimos en la sección anterior, es:

$$W = \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right)$$

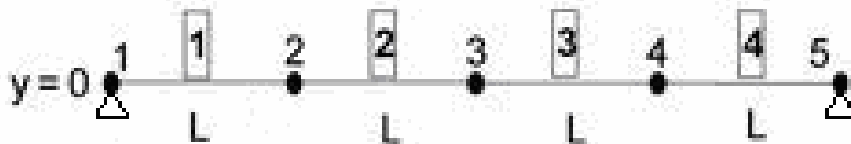
Cuyas condiciones de contorno son  $y(0)=y(L)=y''(0)=y''(L)=0$ , siendo “L” la longitud de la viga.



Siendo  $E$ , el módulo de Young,  $I$  el módulo de inercia,  $e$  y la flecha en la viga.

El método de los elementos finitos consta de las siguientes fases:

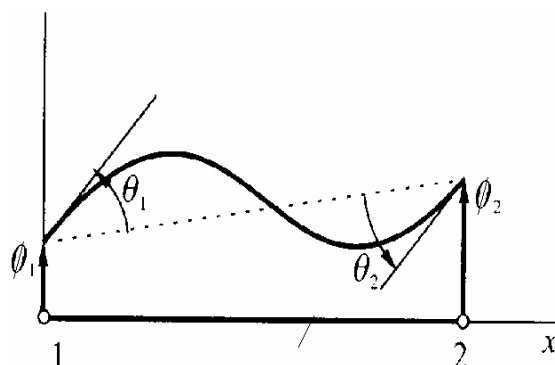
1. **División en elementos finitos o discretización del dominio.**- Esta fase divide el elemento tipo viga en elementos finitos interconectados entre sí mediante nodos que están situados generalmente en los bordes de los elementos. Consideramos una barra larga y delgada sujeta a condiciones de frontera.



2. **Elegir las funciones de aproximación.**- Se desarrollan ecuaciones para aproximar la solución del problema.

Al suponerse la viga indeformable longitudinalmente tendrá únicamente 4 grados de libertad que corresponden a los desplazamientos  $\phi_1, \theta_1, \phi_2, \theta_2$ . Se admite que las deformaciones en flexión son pequeñas y, por tanto,

$$\theta = \frac{d\phi}{dx}$$





La solución más simple es un polinomio de tercer grado con 4 parámetros, igual a los grados de libertad:

$$y(x) \approx \phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad [1]$$

Las funciones de aproximación se suelen elegir que sean polinomios, debido a su facilidad para integrar y derivar.

Los parámetros  $\alpha_i$  se obtienen particularizando la expresión anterior en los nodos,

$$\phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_1^2 + \alpha_4 x_1^3$$

$$\theta_1 = \alpha_2 + 2\alpha_3 x_1 + 3\alpha_4 x_1^2$$

$$\phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_2^2 + \alpha_4 x_2^3$$

$$\theta_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3 x_2 + 3\alpha_4 x_2^2$$



Sin embargo, es más conveniente reproducir el campo de desplazamientos en función de los parámetros nodales  $\phi_1, \theta_1, \phi_2, \theta_2$ . Para ello, sustituimos los parámetros  $\alpha_i$  una vez obtenidos en la ecuación [1], y se obtiene:

$$\phi(x) = N_{\phi_1} \phi_1 + N_{\theta_1} \theta_1 + N_{\phi_2} \phi_2 + N_{\theta_2} \theta_2$$

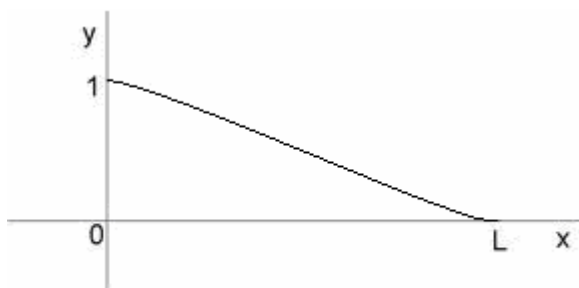
Siendo  $N_{\phi_1}, N_{\theta_1}, N_{\phi_2}, N_{\theta_2}$  las funciones de interpolación del elemento. Es decir,

$$\phi(x) = [N_e] \{ \delta_e \}$$

siendo  $\{ \delta_e \}$  el vector de parámetros nodales del elemento finito  $e$ .

Una vez obtenidos y sustituidos los parámetros en la ecuación [1], se obtiene:

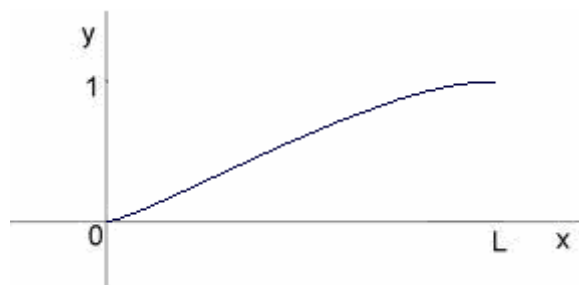
$$N_{\phi_1} = 1 - 3\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2 + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^3$$



$$N_{\theta_1} = (x - x_1) \left[ \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) - 1 \right]^2$$



$$N_{\phi_2} = \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2 + \left[ 3 - 2\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) \right]$$



$$N_{\theta 2} = \frac{(x - x_1)^2}{x_2 - x_1} \left[ \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) - 1 \right]$$



Como  $x_1=0$  y  $x_2=L$ , las anteriores funciones de forma se reducen a:

$$N_{\phi 1} = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_{\theta 1} = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad [2]$$

$$N_{\phi 2} = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_{\theta 2} = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

En resumen, al suponer que las funciones de aproximación  $\phi$  varían según un polinomio de tercer grado entre los valores de las funciones de aproximación  $\phi_1$  y  $\phi_2$  en los nodos, las funciones de interpolación  $N_i$  permiten calcular la solución de un punto cualquiera del elemento en función de las soluciones aproximadas en los nodos.

**3. Matrices locales.** Esta fase del método de los elementos finitos consiste en obtener un ajuste óptimo de la solución que permita calcular los parámetros nodales del elemento, en función de sus propiedades. En nuestro caso estas propiedades son, el módulo de young y el módulo de inercia<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup> Ver Anexo 2

La cuantificación de estos parámetros puede realizarse de acuerdo con diferentes metodologías. La que aquí se describe corresponde al método de los residuos ponderados.

El método de los residuos ponderados o también denominado método del error, se basan en la idea de hacer que la función error de la ecuación diferencial,  $e(x)$ , sea mínima en algún contexto.

$$e(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) - W$$

Para todo  $x$  perteneciente al entorno comprendido entre 0 y Z (longitud de la viga).

La condición de que la función error sea mínima en algún contexto se obtiene al multiplicarla por una función de peso arbitraria,  $w(x)$ , lo suficientemente suave en la región, es decir, diferenciable y continua, de tal manera que se satisfaga la condición.

$$\int_0^Z e(x) w(x) dx = 0$$

Sustituyendo:

$$\int_0^Z \left[ \frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} - W \right] w(x) dx = 0$$

$$\int_0^Z \frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} (x) w(x) dx - \int_0^Z W w(x) dx = 0$$

El método para seleccionar a las funciones de peso,  $w(x)$ , es lo que define el nombre específico del método del error. El método de Galerkin, que es uno de los más utilizados, adapta como funciones de peso las funciones de interpolación, es decir:

$$w(x) = N_i(x)$$

Y queda:

$$\int_0^z \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) N_i(x) dx - \int_0^z W N_i(x) dx = 0$$

Suponemos ahora que la barra se ha discretizado en 4 elementos (5 nodos)<sup>7</sup>. Escogiendo uno de los elementos  $e$  (de longitud  $L=x_2-x_1$ ) e integrando por partes la ecuación anterior:

$$\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) N_e(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \frac{dN_e}{dx} dx - \int_{x_1}^{x_2} W N_e(x) dx = 0$$

haciendo:  $\int u dv = uv \Big|_{x_1}^{x_2} - \int v du$  siendo:  $u = N_e(x)$   $dv = \phi'''(x)$

volviendo a integrar por partes la segunda ecuación:

$$\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) N_e(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \left[ EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \frac{dN_e}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \frac{d^2 N_e}{dx^2} dx \right] - \int_{x_1}^{x_2} W N_e(x) dx = 0$$

reordenando:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \frac{d^2 N_e}{dx^2} dx = EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \frac{dN_e}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) N_e(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} W N_e(x) dx$$

Ahora, si  $\phi(x) = N_{\phi_1} \phi_1 + N_{\theta_1} \theta_1 + N_{\phi_2} \phi_2 + N_{\theta_2} \theta_2$ , entonces:

$$\frac{\phi^2(x)}{dx^2} = \frac{d^2 N_{\phi_1}}{dx^2} \phi_1 + \frac{d^2 N_{\theta_1}}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_{\phi_2}}{dx^2} \phi_2 + \frac{d^2 N_{\theta_2}}{dx^2} \theta_2$$

---

<sup>7</sup> Podría haberse discretizado en el número de partes que hubiéramos querido, sabiendo que cuanto mayor sea esta discretización mayor es la exactitud del método.

O dicho de otro modo:

$$\frac{d\phi^2(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} [N_e] \{ \delta_e \}$$

recordando  $\{ \delta_e \}$  como el vector de parámetros nodales del elemento finito  $e$ .

Por tanto, el primer término de la ecuación reordenada se puede escribir como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \frac{d^2 N_e}{dx^2} dx \equiv \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{d^2}{dx^2} [N_e] \frac{d^2}{dx^2} [N_e]^T \{ \delta_e \}$$

Y sustituyendo en la ecuación completa:

$$\int_{x_1}^{x_2} EI \frac{d^2}{dx^2} [N_e] \frac{d^2}{dx^2} [N_e]^T \{ \delta_e \} = EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \frac{dN_e}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) N_e(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} W N_e(x) dx$$

Los dos primeros términos de  $F$  se denominan condiciones de frontera o de contorno. Resolviendo estas ecuaciones:

- Para  $N_{\phi 1}$ :

$$\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) N_{\phi 1}(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \underbrace{N_{\phi 1}(x_2)}_0 - \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \underbrace{N_{\phi 1}(x_1)}_1 = - \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right)$$

$$EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \frac{dN_{\phi 1}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \underbrace{\frac{dN_{\phi 1}}{dx_2}}_0 - EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \underbrace{\frac{dN_{\phi 1}}{dx_1}}_0 = 0$$

- Para  $N_{\theta 1}$ :

$$\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) N_{\theta 1}(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \underbrace{N_{\theta 1}(x_2)}_0 - \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \underbrace{N_{\theta 1}(x_1)}_0 = 0$$

$$EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \frac{dN_{\theta 1}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \underbrace{\frac{dN_{\theta 1}}{dx_2}}_0 - EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \underbrace{\frac{dN_{\theta 1}}{dx_1}}_1 = -EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2}$$

[3]

- Para ( $N_{\phi 2}$ ):

$$\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) N_{\phi 2}(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \underbrace{N_{\phi 2}(x_2)}_1 - \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \underbrace{N_{\phi 2}(x_1)}_0 = \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right)$$

$$EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \frac{dN_{\phi 2}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \underbrace{\frac{dN_{\phi 2}}{dx_2}}_0 - EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \underbrace{\frac{dN_{\phi 2}}{dx_1}}_0 = 0$$

- Para  $N_{\theta 2}$ :

$$\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) N_{\theta 2}(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \underbrace{N_{\theta 2}(x_2)}_0 - \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \underbrace{N_{\theta 2}(x_1)}_0 = 0$$

$$EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \frac{dN_{\theta 2}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \underbrace{\frac{dN_{\theta 2}}{dx_2}}_1 - EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \underbrace{\frac{dN_{\theta 2}}{dx_1}}_0 = EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2}$$

Sabiendo que el momento flector es:

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \approx EI \frac{d^2 \phi}{dx^2}$$

y que el esfuerzo cortante:

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)$$

entonces concluimos que las dos condiciones de frontera se refieren al momento flector y al esfuerzo cortante.

Los parámetros nodales (conocidos) en la frontera normalmente son nulos, al corresponder a desplazamientos de nodos coaccionados por los enlaces externos. Por ello, no tenemos en cuenta estos dos términos.

Haciendo:

$$K_e = \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{d^2}{dx^2} [N_e] \frac{d^2}{dx^2} [N_e]^T$$

$$F_e = \int_{x_1}^{x_2} W N_e(x) dx$$

nos queda una ecuación de la forma:

$$K \delta_e = F$$

Por tanto, ya estamos en condiciones de poder construir las matrices locales.

Para la matriz de rigidez:

$$[K_e] = \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{d^2}{dx^2} [N_e] \frac{d^2}{dx^2} [N_e]^T$$

derivando por dos veces las funciones de interpolación en [2]:

$$\frac{d^2}{dx^2} [N_e] = \left[ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right]$$

Entonces integrando entre 0 y L, se obtienen los términos de la matriz de rigidez, o coeficientes de rigidez:



$$k_{11} = EI \int_0^L \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right)^2 dx = \frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{12} = EI \int_0^L \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) dx = \frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{13} = EI \int_0^L \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) dx = -\frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{14} = EI \int_0^L \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left( -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) dx = \frac{6EI}{L^2}$$

Y procediendo de igual forma se hallan los restantes coeficientes de rigidez, que determinan la matriz de rigidez de un elemento de viga solicitado a flexión. Si EI es constante:

$$[k_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{vmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{vmatrix}$$

Para el vector de fuerzas nodales equivalente  $F_e$  :

$$\{ F \} = \int_{x_1}^{x_2} W [N_e]^T dx$$

tenemos que:

$$\{ F_w \} = \begin{Bmatrix} F_{\phi_1} \\ F_{\phi_1} \\ F_{\phi_2} \\ F_{\theta_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^L N_{\phi_1} W dx \\ \int_0^L N_{\theta_1} W dx \\ \int_0^L N_{\phi_2} W dx \\ \int_0^L N_{\theta_2} W dx \end{Bmatrix}$$

De acuerdo con esta expresión, y si la carga  $W$  está uniformemente distribuida. Estas fuerzas nodales equivalen a:

$$F_{\phi_1} = \int_0^L \left( 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) W dx = W \left( L - \frac{3L^3}{3L^2} + \frac{2L^4}{4L^3} \right) = \frac{WL}{2}$$

$$F_{\theta_1} = \int_0^L \left( x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) W dx = W \left( \frac{L^2}{2} - \frac{2L^3}{3L} + \frac{L^4}{4L^2} \right) = \frac{WL^2}{12}$$

$$F_{\phi_2} = \int_0^L \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) W dx = W \left( \frac{3L^3}{3L^2} - \frac{2L^4}{4L^3} \right) = \frac{WL}{2}$$

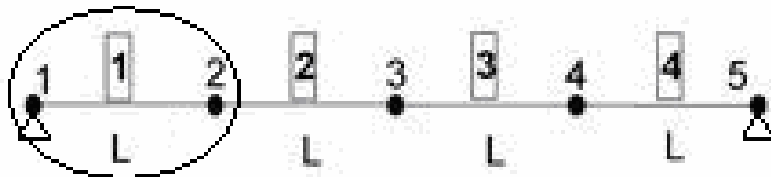
$$F_{\theta_2} = \int_0^L \left( -\frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) W dx = W \left( -\frac{L^3}{3L} + \frac{L^4}{4L^2} \right) = -\frac{WL^2}{12}$$

Por tanto, la ecuación de equilibrio total en forma matricial queda:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \theta_1 \\ \phi_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{WL}{2} \\ \frac{WL^2}{12} \\ \frac{WL}{2} \\ -\frac{WL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \theta_1 \\ \phi_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{WL}{2} \\ \frac{WL^2}{2} \\ \frac{WL}{2} \\ \frac{WL^2}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

*matriz de rigidez del elemento* *efectos externos*



**4. Matrices globales de la estructura. Ensamblaje.**- Como la viga se discretizó en 4 elementos, la matriz completa de rigidez se obtiene ensamblando las submatrices de rigidez de cada elemento:

$$K_0 = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} + K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(4)} \end{pmatrix}$$

Cada elemento finito no tendría porqué medir lo mismo o tener el mismo módulo de inercia  $I$ , pero las características del problema así lo dicen, por tanto  $L$  y  $I$  se hacen constantes:



$$F_w = \begin{pmatrix} F_{\phi 1}^{(1)} \\ F_{\theta 1}^{(1)} \\ F_{\phi 2}^{(1)} + F_{\phi 1}^{(2)} \\ F_{\theta 2}^{(1)} + F_{\theta 1}^{(2)} \\ F_{\phi 2}^{(2)} + F_{\phi 1}^{(3)} \\ F_{\theta 2}^{(2)} + F_{\theta 1}^{(3)} \\ F_{\phi 2}^{(3)} + F_{\phi 1}^{(4)} \\ F_{\theta 2}^{(3)} + F_{\theta 1}^{(4)} \\ F_{\phi 2}^{(4)} \\ F_{\theta 2}^{(4)} \end{pmatrix}$$

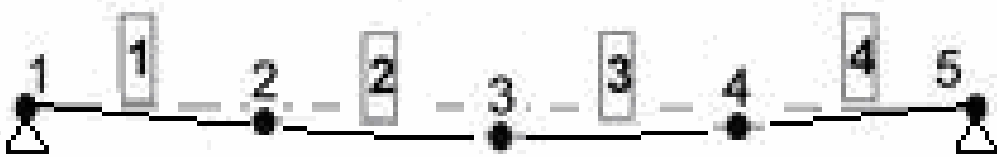
Por tanto, sustituyendo:

$$F_w = \begin{pmatrix} \frac{WL^{(1)}}{2} \\ \frac{WL^{2(1)}}{2} \\ \frac{WL^{(1)}}{2} + \frac{WL^{(2)}}{2} \\ -\frac{WL^{2(1)}}{2} + \frac{WL^{2(2)}}{2} \\ \frac{WL^{(2)}}{2} + \frac{WL^{(3)}}{2} \\ -\frac{WL^{2(2)}}{2} + \frac{WL^{2(3)}}{2} \\ \frac{WL^{(3)}}{2} + \frac{WL^{(4)}}{2} \\ -\frac{WL^{2(3)}}{2} + \frac{WL^{2(4)}}{2} \\ \frac{WL^{(4)}}{2} \\ -\frac{WL^{2(4)}}{2} \end{pmatrix}$$

Al igual que en la matriz de rigidez completa, hemos de considerar los desplazamientos en los extremos son nulos. Por tanto, sustituimos la primera fila y la penúltima por ceros.



ecuaciones lineales permite calcular los parámetros nodales desconocidos. A partir de los parámetros nodales se obtiene la respuesta de los elementos al hallar las deformaciones y los esfuerzos en cualquiera de sus puntos. De esta forma, queda completada la respuesta de la estructura a las condiciones de contorno y de carga, y por tanto, resuelto el problema.



#### Bibliografía:

1. Manuel Vázquez, Eloísa López: “El Método de los Elementos Finitos, aplicado al análisis estructural”, Noela, Madrid, 2001.
2. Francisco Beltrán: “Teoría general del Método de los Elementos Finitos”. Notas de Clase. Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales. ETS Ingenieros Industriales Madrid. Curso 1998-99.
3. O.A.Rascón Ch, R.Cervantes B y TJ Cervantes Q: Seminario: El Método del Elemento Finito en la ingeniería estructural. Instituto mexicano del transporte. Coordinación de desarrollo tecnológico, 2006.

#### Bibliografía complementaria:

4. O.C. Zienkiewicz y R.L.Taylor. El Metodo de los Elementos Finitos. McGraw-Hill. Barcelona. 1994.
5. E. Oñate. Calculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. CIMNE, Barcelona, 1995.

## **4.5 Introducción a la teoría de las vibraciones mecánicas**

### **4.5.1 Introducción**

Todos los cuerpos que poseen masa y elasticidad son capaces de vibrar. La mayoría de las máquinas y estructuras experimentan vibración hasta cierto grado y su diseño requiere de consideraciones de su conducta oscilatoria. Las vigas son elementos estructurales de suma importancia, ya que forman parte del esqueleto de los buques y otras construcciones. Dichas estructuras se encuentran sujetas a fuentes de vibración externa, que pueden ser producidas por motores, compresores, etc.

Si alguna de las fuentes de vibración presenta alguna frecuencia que coincida con una de las frecuencias naturales del elemento estructural, dicho elemento entraría en resonancia, la cual se caracteriza por una amplitud de vibración excesiva, que puede dañar o incluso destruir la estructura. Por tanto, es necesario conocer las diferentes frecuencias naturales o modos de vibración de los elementos estructurales, para evitar las condiciones de resonancia.

### **4.5.2 Teoría de vibraciones**

Cuando una estructura elástica está sujeta a una carga dinámica, el campo de desplazamiento varía con el tiempo debido a cuatro fuerzas: una es por la fuerza de inercia de la estructura, otra es por fricciones internas o externas, la tercera es por fuerzas elásticas actuando en el sistema, y la cuarta es por cualquier fuerza externa aplicada. Como el sistema está en equilibrio estático, la fuerza externa aplicada debe ser igual a la suma de todas las demás fuerzas. Expresado matemáticamente mediante la ecuación diferencial:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + Kx = F$$



siendo  $M$  la masa del sistema,  $c$  el coeficiente de amortiguamiento,  $K$  la constante elástica,  $F$  la fuerza externa,  $x$  el desplazamiento y  $t$  el tiempo. Es la llamada ecuación de movimiento.

### 4.5.3 Vibración libre

Si se toma el caso ideal de una masa sujeta al extremo inferior de un muelle en el cual el sistema no tiene ni amortiguamiento ni fuerzas externas, la ecuación de movimiento se reduce a

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + Kx = 0$$

Esta ecuación expresa la condición de natural vibración, en el cual en cualquier instante las fuerzas que hacen restaurar al sistema son las de inercia y las elásticas. El movimiento es simétrico alrededor de la posición de equilibrio. Esta es la forma más simple de vibración, y se denomina con frecuencia *movimiento armónico simple*. Este movimiento es típico de la mayor parte de los sistemas con un grado único de libertad que se ha desplazado desde una posición de equilibrio estático, en una pequeña cantidad y se ha liberado. Modela con precisión un sorprendente número de sistemas reales.

Los estados de vibración natural se llaman modos naturales, y las frecuencias de vibración son las frecuencias naturales. Para hallar dichos modos y frecuencias naturales se asume<sup>8</sup> que el desplazamiento puede ser expresado como integrales particulares de la ecuación de movimiento reducida:

$$x_1(t) = C_1 e^{i\omega_n t}$$

$$x_2(t) = C_2 e^{-i\omega_n t}$$

---

<sup>8</sup> Ver Anexo 3

Si sustituimos ambas soluciones en la ecuación de movimiento y sumamos, la suma satisface también la ecuación y tiene el número requerido de constantes arbitrarias. Entonces, la solución general es:

$$x(t) = C_1 e^{i w_n t} + C_2 e^{-i w_n t}$$

siempre que  $x_1$  y  $x_2$  no sean linealmente dependientes. La integral general se puede escribir también en forma hiperbólica,

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cosh i w_n t + (C_1 - C_2) \sinh i w_n t$$

o en forma trigonométrica,

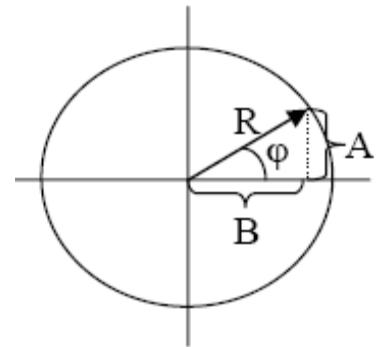
$$x(t) = A \cos w_n t + B \sin w_n t$$

$C_1$ ,  $C_2$ ,  $A$  y  $B$  son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones de movimiento.

Llevamos las constantes  $A$  y  $B$  a una forma más conveniente

$$A = R \cdot \sin(\varphi)$$

$$B = R \cdot \cos(\varphi)$$



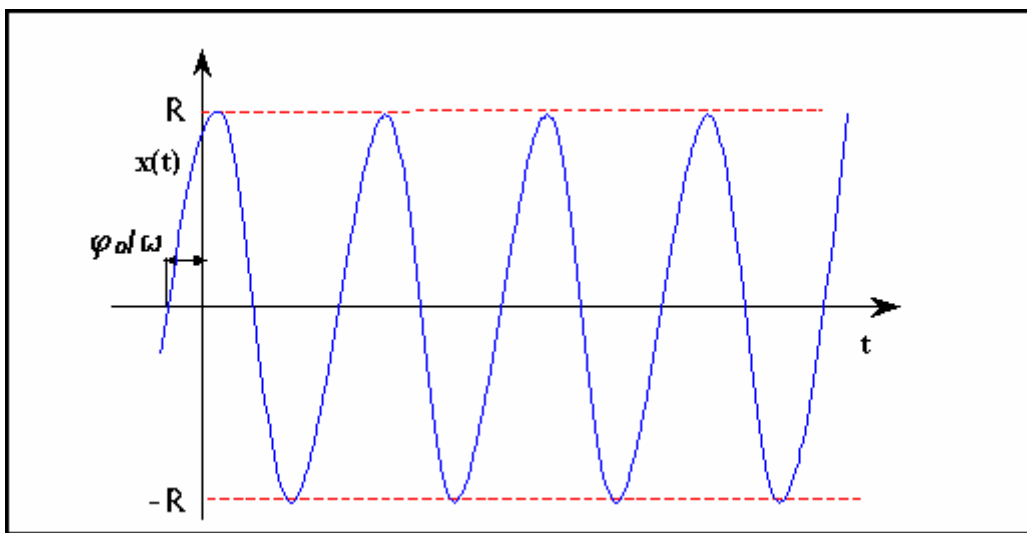
siendo  $R$  la amplitud de la vibración.

$$x(t) = R \cdot \sin(\varphi) \cos(w_n t) + R \cdot \cos(\varphi) \sin(w_n t) \xrightarrow{\text{Aplicando identidad trigonométrica}} x(t) = R \cdot \sin(w_n \cdot t + \varphi)$$

que es la solución final expresada en términos de amplitud.

A  $\omega_n$  lo denominaremos **pulsación natural** y depende exclusivamente del sistema (en este caso de la masa y de la constante de rigidez de la viga).

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \cdot \pi \cdot f_n \quad f_n = \text{frecuencia natural (ciclos por segundo)}$$



#### 4.5.4 Vibración armónica forzada no amortiguada

Ahora, a diferencia de un caso ideal, denominamos *forzado* a aquel sistema elástico sometido a fuerzas externamente aplicadas, y el movimiento de oscilación que resulta en el mismo debido a las fuerzas externamente aplicadas, se llama *vibración forzada*.

Consideremos el movimiento, con un grado único de libertad, de una viga sometida a una fuerza armónicamente variable,  $F(t) = F_1 \cdot \text{sen} \omega t$ .  $F_1$  es el valor máximo de la fuerza impuesta, y  $\omega$  es el valor de la frecuencia con la cual varía, en radianes/segundo, la fuerza  $F(t)$ . Ahora la ecuación del movimiento se torna:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F(t)$$

La solución debe contener la integral general para la ecuación diferencial de movimiento, así como una integral particular que satisfaga la forma particular de en este nuevo caso.

$$x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{F_1}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin\omega t$$

Los primeros dos términos se llaman transitorios. Estos dependen de las condiciones iniciales y después de un periodo de tiempo, con cualquier cantidad medible de amortiguación, la influencia de estos términos es pequeña. En el estado estable, sólo necesitamos dirigir nuestra atención al último término, que se denomina el término de estado estable. Este no se afecta por las condiciones iniciales, y permanece en tanto que se aplique la función forzante. Omitiendo los términos transitorios,

$$x = \frac{F_1}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin\omega t$$

Esto es similar al desplazamiento armónico  $x = R \cdot \sin\omega t$ , en donde el desplazamiento máximo,

$$R = \frac{F_1}{m(\omega_n^2 - \omega^2)}$$

Las funciones forzantes que varían armónicamente, causan un desplazamiento armónicamente variable, estando relacionado el valor máximo de la fuerza,  $F_1$  con el valor máximo del desplazamiento  $R$ . Sustituyendo  $k = m\omega_n^2$ ,

$$\frac{R}{F_1/k} = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})}$$

Ecuación que se denomina *relación de amplitudes*.

Cuando la frecuencia forzante y la frecuencia natural son casi iguales, es evidente que pueden resultar amplitudes de vibración muy grandes, a partir de fuerzas muy pequeñas. La condición  $\omega = \omega_n$  en la que la relación de amplitudes es infinita, se conoce como **resonancia**.

#### 4.5.5 Vibraciones forzadas amortiguadas

Por otro lado, el proceso por el cual la vibración disminuye continuamente en amplitud, recibe el nombre de amortiguación. En la amortiguación, la energía del sistema de vibración se disipa como fricción o calor, o se transmite en forma de sonido. En el mecanismo de la amortiguación ésta puede tomar cualquiera de varias formas, y con frecuencia puede encontrarse presente al mismo tiempo más de una de ellas.

La amortiguación fluida puede ser *viscosa* o *turbulenta*. En la amortiguación viscosa, la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad. En la amortiguación turbulenta, la fuerza es proporcional al cuadrado de la velocidad. En la *fricción seca* o amortiguación de *coulomb*, la fuerza de amortiguación es constante. Esta se causa por la fricción cinética entre superficies deslizantes secas. La *amortiguación sólida o amortiguación histerésica* se ocasiona por la fricción interna o histéresis, cuando se deforma un cuerpo sólido. La amplitud bajo esfuerzo es una medida de la amortiguación sólida.

El mecanismo de amortiguación viscosa provee una fuerza de amortiguación que es proporcional a la velocidad de la masa.

La ecuación de movimiento es ahora:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + Kx = F$$

Esta es, otra vez, una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

La solución será la suma de la solución de la homogénea más la solución particular:

$$X_G = X_P + X_H$$

Para la *homogénea* será:

$$M \frac{dx^2}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + Kx = 0$$

la función exponencial de prueba  $Ce^{rt}$ , da una ecuación característica,

$$r^2 + \frac{c}{M}r + \frac{K}{M} = 0$$

cuyas raíces son complejas,

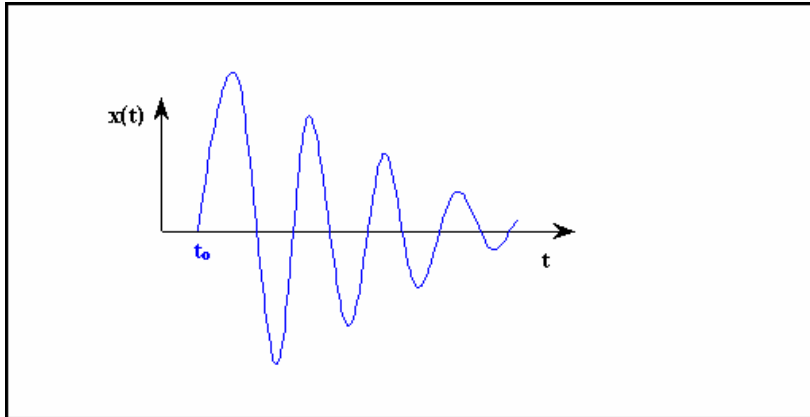
$$r_{1,2} = -\frac{c}{2M} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4M^2} - \frac{K}{M}}$$

La solución general para el desplazamiento es entonces,

$$x = e^{-(c/2M)t} [C_1 e^{+\sqrt{(c^2/4M^2)-(K/M)t}} + C_2 e^{-\sqrt{(c^2/4M^2)-(K/M)t}}]$$

Matemáticamente, ésta es una ecuación exponencial, pero físicamente se puede describir la curva desplazamiento-tiempo como compuesta de tres curvas distintas, dependientes de si el radical  $(c^2/4m^2)-(k/m)$  es real, cero o imaginario.

El último caso es del movimiento armónico amortiguado en el que ocurre oscilación alrededor de una posición de equilibrio, disminuyendo cada amplitud sucesiva con respecto a la anterior.



#### 4.5.6 Sistemas distribuidos

En un sistema discreto, la elasticidad y la masa se modelan como propiedades discretas. Se pueden resolver muchos problemas usando sistemas discretos, pero existen ciertas desventajas, siendo las más obvias que la masa y la elasticidad no siempre se pueden separar en los modelos matemáticos de los sistemas reales. Un método alternativo de modelar sería distribuir la elasticidad y la masa. Los sistemas en los que se considera que la elasticidad y la masa son parámetros distribuidos, son *sistemas distribuidos*. Las vigas se pueden modelar con precisión como sistemas distribuidos.

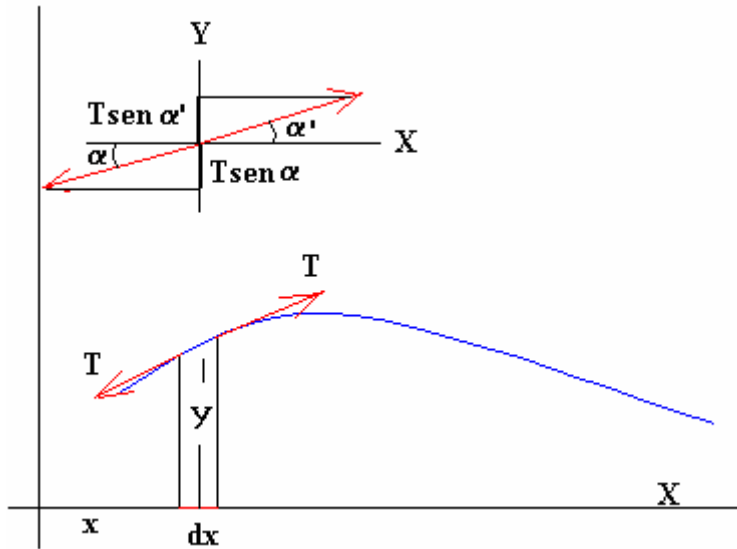
Son necesarias tres suposiciones para formar un modelo matemático de un sistema distribuido. La primera es que el material debe ser homogéneo; la segunda es que debe ser elástico, lo que significa que sigue la ley de Hooke; y la última es que debe ser isotrópico. Estas suposiciones son restrictivas, pero son necesarias.

##### 4.5.6.1 Ecuación de onda

El problema de la ecuación de onda es equivalente al de vibración longitudinal y torsional en barras uniformes. Se expondrá su desarrollo aunque las aplicaciones prácticas de estos 2 tipos de vibración son limitadas. Consideremos una cuerda cuya tensión es  $T$ . En el equilibrio, la cuerda está en línea recta. Vamos a ver lo que ocurre cuando se

desplaza un elemento de longitud  $dx$ , situado en la posición  $x$  de la cuerda, una cantidad  $y$  respecto de la posición de equilibrio.

Dibujamos las fuerzas que actúan sobre el elemento y calculamos la aceleración del mismo, aplicando la segunda ley de Newton.



La fuerza que ejerce la parte izquierda de la cuerda sobre el extremo izquierdo del elemento, es igual a la tensión  $T$ , y la dirección es tangente a la cuerda en dicho punto, formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal.

La fuerza que ejerce la parte derecha de la cuerda sobre el extremo derecho del elemento, es igual a la tensión  $T$ , y la dirección es tangente a la cuerda en dicho punto, formando un ángulo  $\alpha'$  con la horizontal.

Como el elemento se desplaza en la dirección vertical, hallamos las componentes de las dos fuerzas en esta dirección y la resultante.

$$dF_y = T(\text{sen } \alpha' - \text{sen } \alpha)$$

Si la curvatura de la cuerda no es muy grande, los ángulos  $\alpha'$  y  $\alpha$  son pequeños y sus senos se pueden reemplazar por tangentes.



$$dF_y = T(tg\alpha' - tg\alpha) = T d(tg\alpha) = T \frac{\partial}{\partial x}(tg\alpha) dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

La segunda ley de Newton nos dice que la fuerza  $dF_y$  sobre el elemento es igual al producto de su masa por la aceleración (derivada segunda del desplazamiento).

La masa del elemento es igual al producto de la densidad lineal  $m$  (masa por unidad de longitud), por la longitud  $dx$  del elemento.

$$(mdx) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

Simplificando el término  $dx$  llegamos a la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio o ecuación de onda.

Haciendo:

$$v = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

siendo  $v$  la velocidad de propagación de las ondas transversales en la cuerda, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

Se le denomina ecuación de onda porque se le puede describir como una onda estacionaria, si usamos un sistema de coordenadas que se mueva con la perturbación.

Este problema, como apuntábamos anteriormente, es matemáticamente idéntico al de vibración longitudinal y vibración torsional en barras uniformes.

En efecto para la propagación del esfuerzo longitudinal en una barra longitudinal tenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{Eg}{\mu}$$

siendo  $E$  el módulo de elasticidad del material,  $g$  la gravedad y  $\mu$  es la densidad ponderal de la barra.

De igual modo para el caso de vibración torsional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{Gg}{\mu}$$

siendo  $G$  el módulo de rigidez en torsión.

#### 4.5.6.2 Vibración transversal de vigas uniformes

Aislamos hipotéticamente un elemento delgado de una viga. Al flexionarse la viga en vibraciones transversales, el elemento se moverá hacia atrás y hacia delante en la dirección  $y$ , y también girará muy levemente. Despreciando las propiedades inerciales del elemento en rotación y suponiendo momentos,

$$\sum M = 0$$

$$Vdx = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

o

$$V = \frac{\partial M}{\partial x}$$

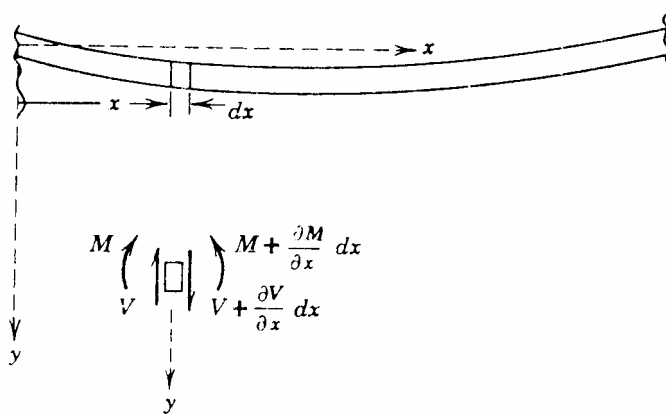
En la dirección- $y$ , la suma de fuerzas es

$$\sum F = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx = \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

o combinando las dos ecuaciones,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



Esta ecuación se parece a la ecuación de onda, pero no lo es. La segunda parcial del momento  $M$  con respecto a  $x$ , es igual a la segunda parcial del desplazamiento  $y$  con respecto al tiempo. Se necesita un paso adicional, la representación del momento flexionante en términos del cambio en pendiente.

$$M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Si la viga es uniforme, la rigidez contra flexión es constante con el desplazamiento y

$$-EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Esta es una ecuación diferencial parcial de cuarto orden, pero se resuelve por separación de variables. Si hacemos que la función  $y(x,t)$  sea el producto de dos funciones separadas, una de  $x$  y una de  $t$ ,

$$y(x,t) = f_1(t)f_2(x)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} f_2(x)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^4 f_2(x)}{dx^4} f_1(t)$$

Sustituyendo en la ecuación de cuarto orden original y separando variables.

$$\frac{1}{f_1(t)} \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} = -\frac{EI}{\rho A f_2(x)} \frac{d^4 f_2(x)}{dx^4} = -\omega_n^2$$

Para que estas dos funciones ahora independientes sean iguales, deben ser iguales a una constante, convenientemente  $-\omega_n^2$ . Como antes,

$$\frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} + \omega_n^2 f_1(t) = 0$$

o,

$$f_1(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$$

En forma similar,

$$\frac{d^4 f_2(x)}{dx^4} = -\frac{\rho A \omega_n^2}{EI} f_2(x) = 0$$

Esto es diferente, ésta es una ecuación diferencial de cuarto orden. Llamando  $\beta^4 = \rho A \omega_n^2 / EI$ , la solución es

$$f_2(x) = C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x$$

La diferenciación verificará que  $f_2(x)$  es una solución. La solución completa para  $y=(x,t)$  es

$$y(x,t) = (A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t)(C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x)$$

Para resolver esta ecuación general de la vibración transversal de una viga, necesitaremos dos condiciones iniciales y cuatro condiciones de límite. Con las cuatro condiciones de límite encontraremos también los valores característicos de la ecuación de frecuencia que estarán en términos de ciertos valores específicos de  $\beta l$ .

$$\omega_n = \beta^2 l^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

#### Bibliografía:

1. R.F.Steidel Jr: "Introducción al estudio de las Vibraciones Mecánicas", Continental, México, 1995.
2. Adán Javier Levy: Apunte teórico, "vibración de estructuras". Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, 2005.

## **5. RESULTADOS: Aplicación del método de los elementos finitos al análisis dinámico de una viga**

### **5.1 Introducción**

Del mismo modo que el método de los elementos finitos es una herramienta muy útil en el análisis estático de las estructuras, también lo es para analizar el comportamiento dinámico de estas mismas.

Como ya hemos aventurado el mayor problema de Astilleros y Sociedades de Clasificación es evitar desde las primeras fases de diseño del buque, los posibles fenómenos de resonancia. Para ello, deben implicarse tanto el Astillero como sus suministradores, ya que son el motor y la hélice las mayores fuentes de excitación del buque.

Los posibles fenómenos de resonancia surgen cuando una de los modos y frecuencias provenientes de las fuentes de excitación coincide con los modos y frecuencias naturales de la propia estructura. Los efectos de dicho fenómeno son posibles roturas en otros equipos o estructuras, además de niveles indeseables de ruido.

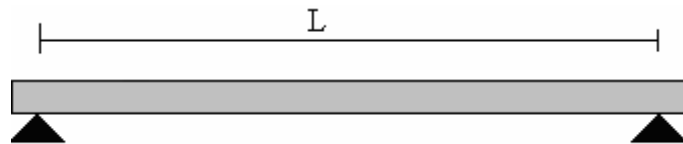
A bordo de los nuevos buques ferry, este problema supone aún mayor interés, puesto que a las especiales características constructivas del buque se unen las necesidades y exigencias en torno al confort de los pasajeros en las zonas de acomodación. Esto ha provocado que el análisis por el método de los elementos finitos del buque completo o de zonas del mismo sea en la actualidad una de las mayores herramientas que poseen los ingenieros navales para evitar desde las primeras fases de diseño los posibles efectos de la vibración.

Por tanto, la tarea que se ha querido acometer en este trabajo es la de calcular los frecuencias naturales y modos de vibración de un elemento “local” de la estructura, por medio de este, ya menos nuevo, método numérico. Con el conocimiento de estos valores, y su comparación con

las frecuencias de las fuentes excitadoras podría realizarse o no las modificaciones oportunas en el diseño estructural, separando suficientemente, entre un 15-20%, frecuencias propias locales de frecuencias excitadoras.

## 5.2 Modos y frecuencias naturales en una viga

El problema consiste en hallar los modos y frecuencias naturales de una viga apoyada en sus extremos.



Cuando no existen cargas aplicadas sobre una estructura y el amortiguamiento se supone despreciable, la ecuación de equilibrio dinámico

$$[M]\{\ddot{\delta}(t)\} + [C]\{\dot{\delta}(t)\} + [K]\{\delta(t)\} = \{F\} \quad [5.1]$$

se transforma en

$$[M]\{\ddot{\delta}(t)\} + [K]\{\delta(t)\} = \{0\}$$

siendo  $\delta(t)$  el vector de desplazamientos nodales, que varían con el tiempo  $t$ .

Esta ecuación representa un movimiento armónico simple en el que las fuerzas internas de la estructura (elásticas o no) equilibran en cada instante a las fuerzas de inercia.

Para estudiar la vibración natural de una viga suponemos que el vector de desplazamientos nodales, variable con el tiempo, puede expresarse en la forma.

$$\{\delta(t)\} = \{\delta\} \text{sen}(wt + \phi)$$

Donde  $\{\delta\}$  es el vector formado por las amplitudes de los desplazamientos nodales y  $w$  es la frecuencia de la vibración. Teniendo en cuenta que

$$\{\ddot{\delta}(t)\} = -w^2 \{\delta\} \text{sen}(wt + \phi)$$

Al sustituir esta igualdad en [4.1] se obtiene

$$([K] - \lambda[M])\{\delta\} = \{0\}, \quad \text{siendo} \quad \lambda = w^2 \quad [5.2]$$

Para que esta ecuación tenga una solución distinta de la trivial,  $\{\delta\} = 0$ , es necesario se verifique la ecuación característica del problema de autovalores

$$\det([K] - \lambda[M]) = \{0\}$$

Si  $n$  es el orden de las matrices  $[M]$  y  $[K]$  habrá  $n$  escalares  $\lambda_i$ , llamados *autovalores*, que satisfacen la ecuación característica. A cada autovalor  $\lambda_i$  y, por tanto, a cada frecuencia natural  $w_i = \sqrt{\lambda_i}$  le corresponde un vector  $\{\delta\}_i$ , llamado autovector o modo natural, que satisfará el sistema de ecuaciones lineales y homogéneas representado por [4.2]. Por consiguiente, la viga tendrá un número de frecuencias y modos naturales igual al orden de las matrices  $[M]$  y  $[K]$ , que coincide con el número de grados de libertad de la viga.

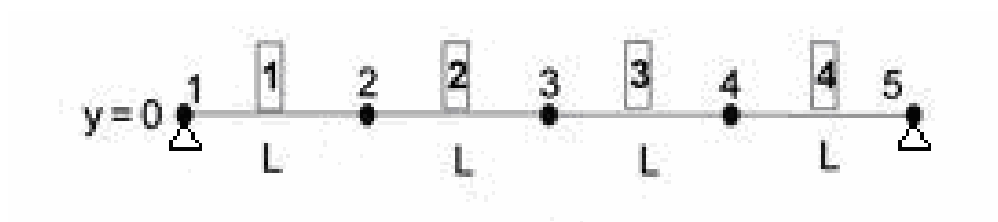


Como el sistema de ecuaciones lineales es indeterminado, únicamente se puede hallar valores relativos de las amplitudes de los desplazamientos nodales correspondientes a los modos naturales. Ello obliga a prefijar en cada modo natural la amplitud de unos de los desplazamientos nodales, haciéndola usualmente igual a la unidad.

### **Frecuencias naturales**

#### Discretización de la estructura

De la misma manera que describimos en la unidad 2, la primera fase del método del elemento finito es la de discretización de la viga.



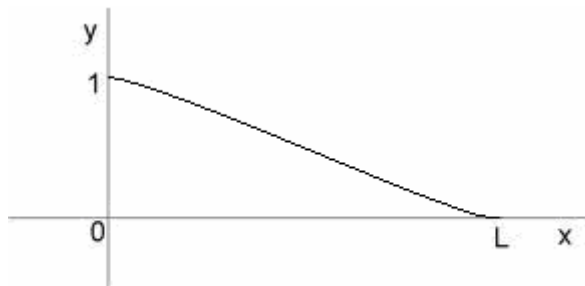
#### Elegir funciones de aproximación

Las funciones de aproximación escogidas son las mismas que para el ejemplo de la sección 2:

$$y(x) \approx \phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

Así que las funciones de interpolación serán:

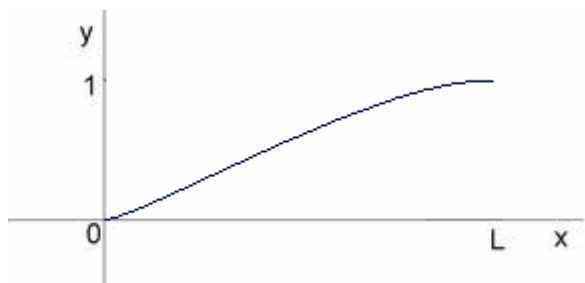
$$N_{\phi_1} = 1 - 3\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2 + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^3$$



$$N_{\theta 1} = (x - x_1) \left[ \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) - 1 \right]^2$$



$$N_{\phi 2} = \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2 + \left[ 3 - 2 \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \right]$$



$$N_{\theta 2} = \frac{(x - x_1)^2}{x_2 - x_1} \left[ \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) - 1 \right]$$



Como  $x_1=0$  y  $x_2=L$ , las anteriores funciones de forma se reducen a:

$$N_{\phi 1} = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_{\theta 1} = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$N_{\phi 2} = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_{\theta 2} = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

### Matrices locales

Siendo  $\rho$  la densidad del material de la viga, e  $y(t)$  el campo de desplazamientos, las fuerzas de inercia por unidad de volumen están definidas por

$$\rho \{ \partial^2 y(t) / \partial t^2 \} \equiv \rho \{ \ddot{y}(t) \}$$

De acuerdo con el principio de D'Álembert<sup>9</sup>, estas fuerzas de inercia son equivalentes estáticamente a

---

<sup>9</sup> El principio de d'Alembert, enunciado por Jean d'Alembert en su obra maestra, el tratado de dinámica establece que la suma de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo y las denominadas fuerzas de inercia forman un sistema de fuerzas en equilibrio.

$$-\rho\{\ddot{y}(t)\}$$

siendo  $y(t)$  el campo de desplazamientos del elemento, que podría expresarse aproximadamente como ya hemos visto:

$$\{y(t)\} = N_e(x, y, z)\{\delta_e(t)\} \quad [5.3]$$

Ahora bien, el vector de fuerzas nodales equivalente a las fuerzas de inercia es:

$$\{F_{ine}(t)\} = \int_{V_e} [N_e]^T (-\rho\{\ddot{y}_e(t)\}) dV_e$$

Y sustituyendo [4.3], resulta

$$\{F_{ine}(t)\} = -\left(\int_{V_e} \rho [N_e]^T [N_e] dV_e\right) \{\ddot{\delta}_e(t)\}$$

o bien

$$\{F_{ine}(t)\} = -[m_e] \{\ddot{\delta}_e(t)\}$$

Por lo tanto, la matriz de masa del elemento  $[m_e]$ , queda definida por

$$[m_e] = \int_{V_e} \rho [N_e]^T [N_e] dV_e$$

Definamos ahora cual será la matriz de masa de uno de los elementos; tenemos:

$$N_{\phi 1} = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_{\theta 1} = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$N_{\phi 2} = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_{\theta 2} = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$[m_e] = \int_{V_e} \rho [N_e]^T [N_e] dV_e$$

$$m_{11} = \rho \int_L (1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3})^2 A dx = \rho A \int_L (1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3})^2 dx = \rho A \frac{13L}{35}$$

$$m_{12} = \rho A \int_L (1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}) (x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}) dx = \rho A \frac{11L^2}{210}$$

$$m_{13} = \rho A \int_L (1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}) (\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}) dx = \rho A \frac{9L}{70}$$

$$m_{14} = \rho A \int_L (1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}) (-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}) dx = -\rho A \frac{13L^2}{420}$$

$$m_{21} = \rho A \int_L (x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}) (1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}) dx = \rho A \frac{11L^2}{210}$$

$$m_{22} = \rho A \int_L (x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2})^2 dx = \rho A \frac{L^3}{105}$$

$$m_{23} = \rho A \int_L (x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}) (\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}) dx = \rho A \frac{13L^2}{420}$$

$$m_{24} = \rho A \int_L (x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}) (-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}) dx = -\rho A \frac{L^2}{140}$$

$$m_{31} = \rho A \int_L (\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}) (1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}) dx = \rho A \frac{9L}{70}$$

$$m_{32} = \rho A \int_L \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) \left( x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) dx = \rho A \frac{13L}{35}$$

$$m_{33} = \rho A \int_L \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right)^2 dx = \rho A \frac{13L^2}{420}$$

$$m_{34} = \rho A \int_L \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right)^2 \left( -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) dx = -\rho A \frac{11L^2}{210}$$

$$m_{41} = \rho A \int_L \left( -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \left( 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) dx = -\rho A \frac{13L^2}{420}$$

$$m_{42} = \rho A \int_L \left( -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \left( x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) dx = -\rho A \frac{L^2}{140}$$

$$m_{43} = \rho A \int_L \left( -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) dx = -\rho A \frac{11L^2}{210}$$

$$m_{44} = \rho A \int_L \left( -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right)^2 dx = \rho A \frac{L^3}{105}$$

Estos coeficientes determinan la matriz de rigidez de un elemento de viga.

$$[m_e] = \frac{m}{420} \begin{vmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{vmatrix}$$

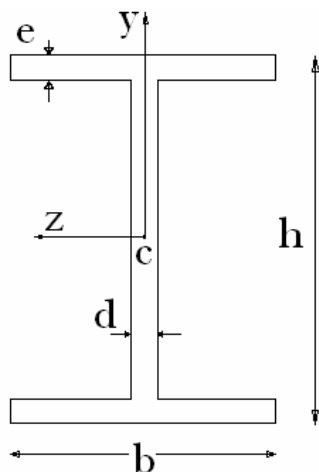
Por su parte, la matriz de rigidez del elemento  $[K_e]$  es la misma que obtuvimos para el problema de desplazamientos de la sección 2.

$$[K_e] = \int_L EI \frac{d^2}{dx^2} [N_e] \frac{d^2}{dx^2} [N_e]^T dx$$









$$h=600\text{ cm}$$

$$b=300\text{ cm}$$

$$e=35\text{ cm}$$

$$d=25\text{ cm}$$

$$L=\text{Longitud del elemento de la viga} = 1\text{ metro}$$

Por tanto:

$$A=\text{Área} = 34250\text{ cm}^2 = 3,42\text{ m}^2$$

$$I = 21,2807\text{ m}^4$$

$$L=\text{Longitud del elemento de la viga} = 1\text{ metro}$$

$$m = \text{masa del elemento} = \rho AL = 7,85(\text{T/m}^3) \times 3,42\text{ m}^2 \times 1\text{ m} = 26,847\text{ Ton}$$

Mediante el programa *mathematica* se ha desarrollado el problema calculado y obtenido los resultados<sup>10</sup>.

De esta manera, los 5 autovalores<sup>11</sup> más pequeños que cumplen con la ecuación característica son:

---

<sup>10</sup> Ver ejercicio *mathematica*: "Autovalores".

<sup>11</sup> Sólo estudiamos los 5 primeros modos, pues son las frecuencias más bajas las más relevantes desde el punto de vista del estudio del riesgo de vibración.

$$\lambda_1 = 6,33716 \times 10^6$$

$$\lambda_2 = 1,02143 \times 10^8$$

$$\lambda_3 = 5,31964 \times 10^8$$

$$\lambda_4 = 1,99752 \times 10^9$$

$$\lambda_5 = 5,04672 \times 10^9$$

y,

$$w_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2517,4 \text{ Rad / s}$$

$$w_2 = \sqrt{\lambda_2} = 10106,6 \text{ Rad / s}$$

$$w_3 = \sqrt{\lambda_3} = 23064,3 \text{ Rad / s}$$

$$w_4 = \sqrt{\lambda_4} = 44693,6 \text{ Rad / s}$$

$$w_5 = \sqrt{\lambda_5} = 71040,2 \text{ Rad / s}$$

De las cuales  $\omega_1$  es la frecuencia más baja o *frecuencia fundamental*. De hecho, hasta ahora hemos tratado con frecuencias angulares, cuya unidad es radianes por segundo. La frecuencia en Herzios se determinaría:

$$f(\text{Hz}) = \frac{w}{2\pi}$$

siendo la frecuencia  $f$  el número de oscilaciones por segundo que se realizan.

### **Modos naturales**

El modo natural correspondiente a cada autovalor se determina resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$([K] - \lambda[M])\{\delta\} = \{0\}$$

Para cada autovalor (frecuencia) se obtiene un vector de desplazamientos. Como el sistema es indeterminado, hemos de normalizar un nodo (igualándolo a 1 por ejemplo), por lo que se obtiene el vector de desplazamiento en relación a este nodo normalizado.

$$\{\delta\} = \{\{\phi_1\}, \{\theta_1\}, \{\phi_2\}, \{\theta_2\}, \{\phi_3\}, \{\theta_3\}, \{\phi_4\}, \{\theta_4\}, \{\phi_5\}\}^{12}$$

Para  $\lambda_1 = 6,33716 \times 10^6$ , el resultado fue<sup>13</sup>:

$$\phi_1 = 0 \text{ m}$$

$$\theta_1 = 1.11071 \text{ rad}$$

$$\phi_2 = 1 \text{ m} \rightarrow \text{nodo normalizado}$$

$$\theta_2 = 0.785406 \text{ rad}$$

$$\phi_3 = 1.41424 \text{ m}$$

$$\theta_3 = 2.9 \times 10^{-5} \text{ rad} \approx 0 \text{ rad}$$

$$\phi_4 = 1.00004 \text{ m}$$

$$\theta_4 = -0.785406 \text{ rad}$$

$$\phi_5 = 0 \text{ m}$$

$$\theta_5 = -1.11077 \text{ rad}$$

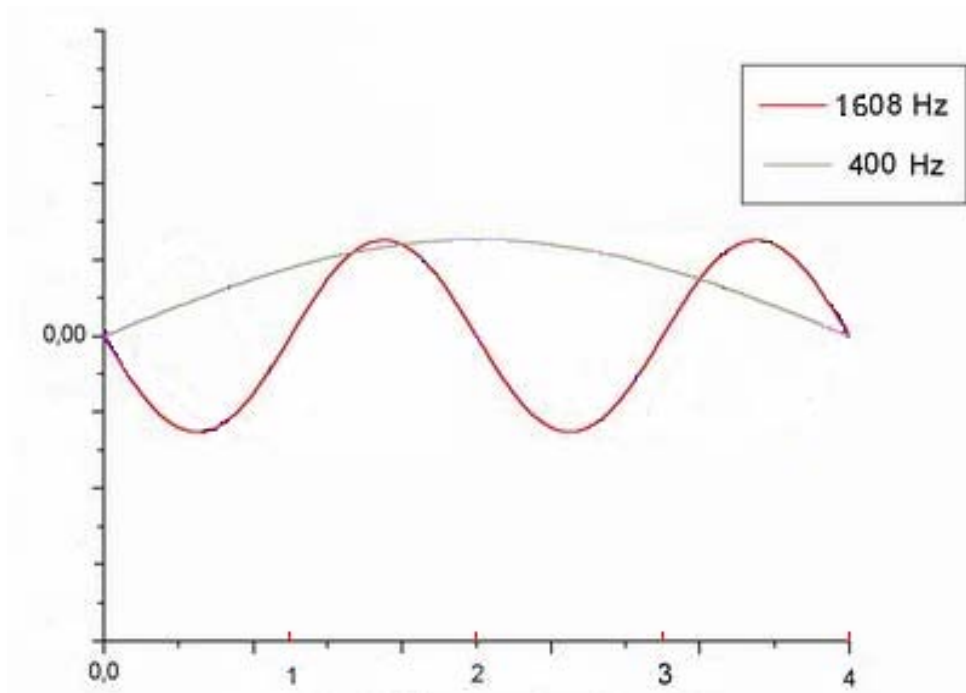
Ídem para los demás autovalores.

Finalmente, representando primer y segundo modo por medio de una gráfica:

---

<sup>12</sup> Hay que reseñar que la nomenclatura que se ha usado en el programa *matemática* es  $\delta = \{\{x\}, \{y\}, \{d\}, \{z\}, \{r\}, \{s\}, \{t\}, \{u\}, \{w\}, \{q\}\}$ , para simplificar el proceso únicamente; siendo “d” el nodo normalizado.

<sup>13</sup> Ver ejercicio *Matemática*: ”modos”.



primer y segundo modo vibratorio de la viga por el método aproximado de elementos finitos a escala no real.

Hay que reseñar, que sería conveniente para este tipo de problemas, controlar algún programa por elementos finitos adecuado. De esta manera la resolución y representación de los datos obtenidos sería mucho más sencillo y eficaz.

#### Bibliografía:

1. Manuel Vázquez, Eloísa López: “El Método de los Elementos Finitos, aplicado al análisis estructural”, Noela, Madrid, 2001.

## 6. DISCUSION

La partida de nacimiento del MEF, esta fechada en 1956. Se trata de un artículo histórico aparecido en una revista relacionada con la industria aeronáutica, y se debía a la necesidad de analizar cómo se distorsionan bajo presión las distintas partes de las alas y del fuselaje de un avión, y cómo responden a las vibraciones.

Se concebía entonces una nueva técnica de cálculo, inabordable sin la ayuda del ordenador, que fue bautizada con el nombre de “calculo matricial de estructuras”.

Así pues, el MEF nació en el ámbito del cálculo de estructuras y esto ha impregnado toda la terminología asociada al mismo. En un principio se presento como un procedimiento de cálculo mas, entre los muchos desarrollados por ingenieros ocupados en resolver problemas prácticos. Sin embargo, durante los años sesenta los investigadores descubrieron que la esencia de lo que había sido una mera generalización del cálculo matricial podía utilizarse, no solo para resolver problemas de cálculo de estructuras, sino también problemas de campo en general, tales como problemas de elasticidad o de conducción de calor.

Por otro lado, tras el éxito en las primeras aplicaciones, se comprobó que a pesar de haber sido desarrollado con mentalidad práctica (ingenieril), el método tenía hondas raíces matemáticas.

Esta generalidad empezó a atraer el interés de los matemáticos, los cuales contribuyeron decisivamente a explicar con rigor las bases del MEF. Sin embargo, debe hacerse notar que la contribución de los matemáticos al MEF ha ido siempre muy por detrás de las aplicaciones prácticas. El MEF nació como una herramienta ingenieril y sus líneas básicas de desarrollo han estado siempre muy vinculadas a la presión de la industria por resolver problemas. En muchas etapas de su evolución se ha concebido y aplicado con éxito una determinada técnica numérica antes de encontrar su justificación matemática rigurosa. De hecho, es

sintomático que el primer libro importante en que se analiza el MEF desde el punto de vista matemático se publicara en 1974, cuando el método llevaba al menos quince años empleándose en la industria y había alcanzado una gran madurez en su aplicación a problemas lineales.

Además, la manera en que ingenieros y matemáticos abordan el problema de la discretización de un continuo es diferente. Los matemáticos han desarrollado técnicas generales aplicables directamente a las ecuaciones diferenciales que rigen el problema. Los ingenieros, por otra parte, suelen enfrentarse al problema más intuitivamente creando una analogía entre elementos discretos reales y porciones finitas de un dominio continuo.

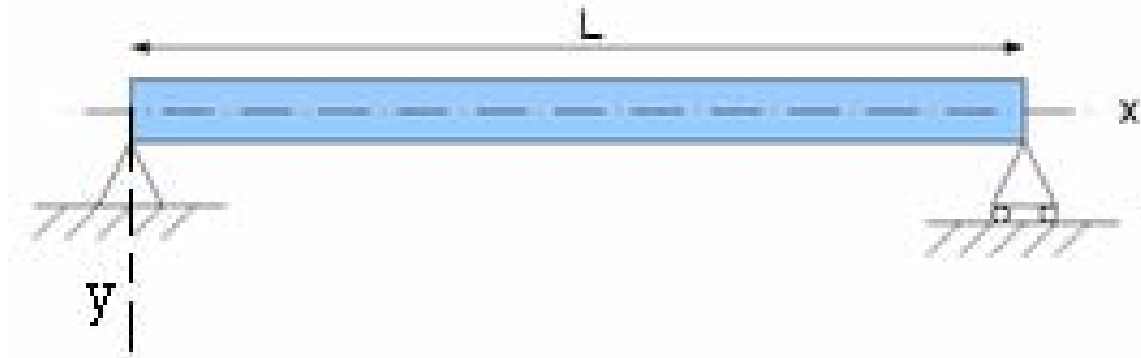
Es por tanto de la posición de “analogía directa”, adoptada por los ingenieros, de donde nace la expresión “elemento finito”.

El método de los elementos finitos es un método de aproximación cuya exactitud depende del nivel de discretización de la estructura, así como de las funciones de aproximación que utilicemos. Generalmente, cuanto mayor sea el grado del polinomio de aproximación, mayor es la exactitud del método.

Una desventaja del M.E.F es que la masa y la elasticidad no siempre se pueden separar en los modelos matemáticos de los sistemas reales. Cuando estudiábamos, en efecto los *sistemas distribuidos*, en los que se “distribuyen” estas dos propiedades, determinábamos la ecuación diferencial de equilibrio dinámico de la viga.

No en todos los casos, el comportamiento de una estructura continua podemos describirla mediante una ecuación diferencial, pero en este sencillo caso sí. Por tanto, podemos comparar la solución obtenida mediante el método de los elementos finitos y la solución real, y determinar la magnitud del error cometido.

Para analizar la aproximación del M.E.F consideramos de nuevo la misma viga y deduciremos las frecuencias naturales exactas.



Como deducimos en la sección de “estudio general de vibraciones de una viga”, la deflexión  $y(x,t)$  se describe por la ecuación

$$y(x,t) = (A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t) (C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x)$$

Las condiciones de límite son las mismas en  $x=0$  y  $x=L$ ; la deflexión y el momento flexionante valen ambos cero. Usando estas condiciones, en  $x=0$ ,

$$y(0,t) = 0 = (A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t) (\underbrace{C_1 \cosh \beta x}_1 + \underbrace{C_2 \sinh \beta x}_0 + \underbrace{C_3 \cos \beta x}_1 + \underbrace{C_4 \sin \beta x}_0)$$

$$0 = C_1 + C_2$$

$$M = -EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 = -EI \beta^4 (A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t) (\underbrace{C_1 \cosh \beta x}_1 + \underbrace{C_2 \sinh \beta x}_0 - \underbrace{C_3 \cos \beta x}_1 - \underbrace{C_4 \sin \beta x}_0)$$

$$0 = C_1 - C_3$$

Por tanto,  $C_1 = C_3 = 0$ .

En  $x=L$

$$y(L,t) = 0 = (A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t) (C_2 \sinh \beta L + C_4 \sin \beta L)$$

y

$$M(L,t) = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 = -EI\beta^2 (A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t) (C_2 \sinh \beta L - C_4 \sin \beta L)$$

Estas dos ecuaciones se pueden escribir,

$$\begin{vmatrix} \sinh \beta L & \sin \beta L \\ \sinh \beta L & -\sin \beta L \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No considerando la solución trivial  $c_2=c_4=0$  y haciendo el determinante igual a cero, se tiene la ecuación de frecuencia

$$-2 \sinh \beta L \sin \beta L = 0$$

Ya que  $\sinh \beta L > 0$  para todos los valores de  $\beta L \neq 0$ , las únicas raíces para esta ecuación son  $\beta L = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, h\pi$

$$\omega_n^2 = \beta^4 L^4 \frac{EIg}{wL^4} = n^4 \pi^4 \frac{EI}{\rho AL^4}$$

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$$

en donde  $n$  es el entero que indica la armónica,  $\rho$  la densidad del acero, y  $A$  la sección transversal.

Resolviendo la ecuación tenemos que para:

$n=1$	$\omega_1 = 2516,72 \text{ rad/s}$
$n=2$	$\omega_2 = 10066,9 \text{ rad/s}$
$n=3$	$\omega_3 = 22650,5 \text{ rad/s}$
$n=4$	$\omega_4 = 40267,5 \text{ rad/s}$
$n=5$	$\omega_5 = 62917,9 \text{ rad/s}$

Estas son las frecuencias reales que comparándolas con las frecuencias determinadas por el método de los elementos finitos<sup>14</sup>:

---

<sup>14</sup> Ver ejercicio *matemática*: "Autovalores"



$$w_1 = 2517,4 \text{ rad / s}$$

$$w_2 = 10106,6 \text{ rad / s}$$

$$w_3 = 23064,3 \text{ rad / s}$$

$$w_4 = 44693,6 \text{ rad / s}$$

$$w_5 = 71040,2 \text{ rad / s}$$

Se observa, que hasta el tercer armónico el error cometido no supera el 2%, y que para la frecuencia principal el resultado es prácticamente exacto.

Ahora calculamos las frecuencias por el método de los elementos finitos pero discretizando la viga en 8 elementos<sup>15</sup>.

$$w_1 = 2523,6 \text{ rad / s}$$

$$w_2 = 10156,9 \text{ rad / s}$$

$$w_3 = 23000,8 \text{ rad / s}$$

$$w_4 = 41199,2 \text{ rad / s}$$

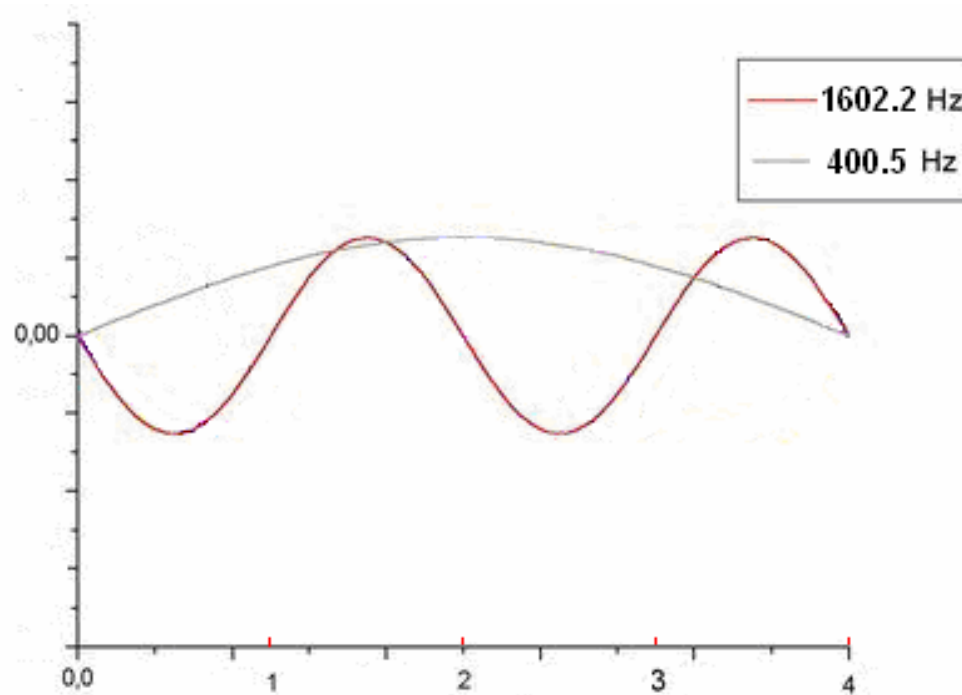
$$w_5 = 65118,7 \text{ rad / s}$$

Puede verse ahora que el máximo error cometido no supera el 4%, cuando en el caso anterior superó el 12%.

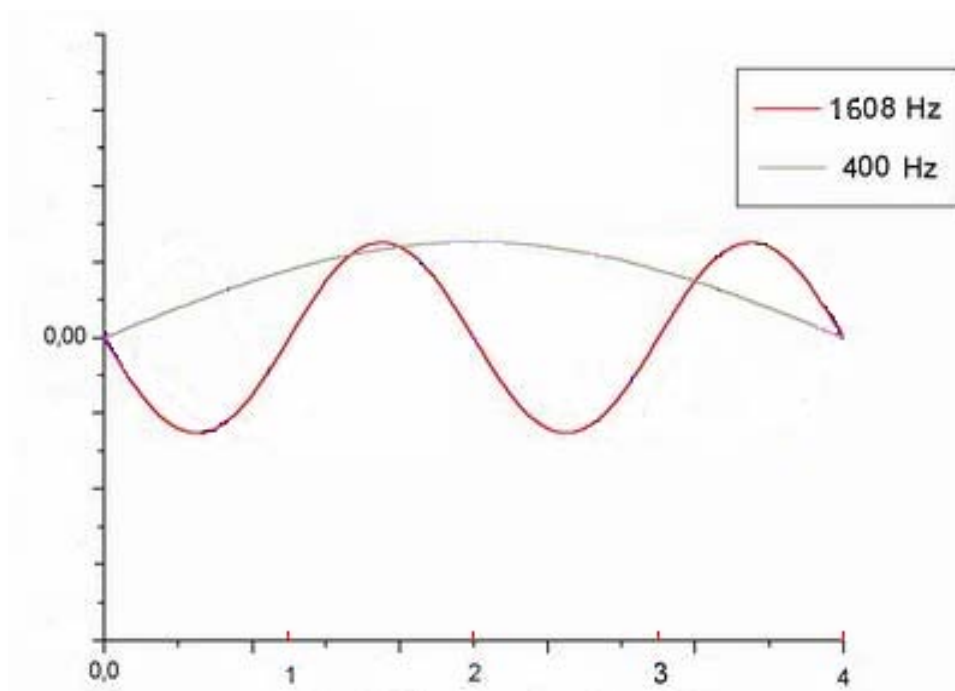
Por tanto cuanto más pequeño hagamos la “malla” que subdivide a la viga en elementos finitos, más nos aproximamos a la solución exacta.

---

<sup>15</sup> Ver ejercicio *matemática*: “Aproximación por medio de 8 elementos finitos”



Modos naturales primero y segundo de la viga.



Modos naturales primero y segundo de la viga por el M.E.F (4 elementos).

Bibliografía:

1. Francisco Beltrán: “Teoría general del Método de los Elementos Finitos”. Notas de Clase. Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales. ETS Ingenieros Industriales Madrid. Curso 1998-99.
2. O.C. Zienkiewicz y R.L.Taylor. El Metodo de los Elementos Finitos. McGraw-Hill. Barcelona. 1994.
3. R.F.Steidel Jr: “Introducción al estudio de las Vibraciones Mecánicas”, Continental, México, 1995.

## 7. CONCLUSIONES

El interés en trabajar sobre este tema, surge de la gran explosión con que el Método de los Elementos Finitos inundó ya hace algún tiempo tanto el ambiente académico como el campo de la industria, unido a las cada vez más exigentes normas sobre niveles de vibración a bordo de los nuevos buques ferry.

A lo largo de este trabajo se han determinado las ecuaciones de equilibrio estático y dinámico respectivamente de una viga, en el primer caso cargado uniformemente. El objetivo era describir el fundamento teórico del elemento finito y en este caso podíamos comparar la aproximación por medio del método con la solución exacta descrita por la ecuación diferencial de equilibrio dinámico. Pero para un buque completo no es posible determinar una ecuación diferencial que describa su comportamiento. A este tipo de estructuras le llamábamos sistemas continuos. Para encontrar una solución lo más acertada posible habíamos de subdividir como hicimos con el elemento viga en elementos finitos pero no infinitesimales, en los cuales aplicando las ecuaciones de equilibrio, estático o dinámico en cada punto o “nodo” previamente considerado, aproximábamos la solución a la estructura total.

Comprobando el gran volumen de cálculo que hemos necesitado para resolver una simple viga, no es difícil entender que realizar lo mismo con un buque completo, es definitivamente imposible. Para ello, se cuentan en la actualidad con potentes computadoras y softwares que permiten resolver en nuestras oficinas técnicas la infinidad de ecuaciones que describen el modelo y que de otro modo sería inabarcable. Una forma útil y que se lleva a cabo en Los Astilleros es la posibilidad de manejar “subestructuras”. Las subestructuras son ensamblajes de elementos básicos (placas y barras) que se emplean como “macroelementos” o “bloques” en la modelización de estructuras más grandes y complejas.

En nuestros días, la construcción de buques tipo ferry de nueva generación está experimentando un gran auge. El ruido y vibraciones en buques de este tipo son de máxima importancia, puesto que prima ante todo el confort de pasajeros en las zonas de acomodación. Para ello existen reglas exigidas por las Sociedades de Clasificación, que junto a la responsabilidad de los Astilleros, hacen que este asunto, esté en la primera línea de atención desde las fases más tempranas del diseño constructivo.

En líneas generales, la forma de evitar los niveles excesivos de vibración, consiste en evitar que las frecuencias de vibración provenientes de las fuentes de excitación principales (las cuales se han descrito detalladamente) entren en resonancia con las frecuencias naturales de la propia estructura, es decir, que estas dos frecuencias coincidan. De ser así, las amplitudes de vibración aumentarían enormemente llegando a poner en riesgo incluso la integridad de las estructuras o de determinados equipos. La forma de evitar esto, es separando convenientemente, mediante modificaciones estructurales, los modos y frecuencias naturales entre un 15% y 20% de las frecuencias excitadoras.

Precisamente obtener estos modos y frecuencias naturales es lo que hemos hecho, pero aplicado a un elemento viga. Dado que las características de un ferry obliguen a disponer de espacios diáfanos en bodegas para el tránsito de vehículo, y que por ello se dispongan de pocos mamparos, asumiéndose su labor por largos y espaciados puntales en crujía; esto obliga a que se dispongan de grandes tramos de vigas bajo las cubiertas, y que este elemento constructivo, por tanto, deba ser tenido muy en cuenta en el proyecto.

Observando los resultados se llega a la conclusión de que el método es sobradamente aproximado y de que éste lo es cada vez cuanto mayor número de elementos finitos consideremos en la fase de discretización.

Otra conclusión que se deduce inmediatamente es que para estructuras más complejas el uso de computadoras es primordial.

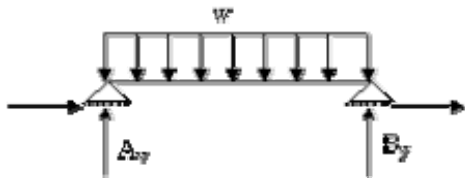
Todo esto, unido al gran interés que en los últimos años, dentro de la construcción naval, suscita el control de vibraciones, así como al asunto de que muchos recién ingenieros técnico navales trabajan actualmente o trabajarán con herramientas de elementos finitos, puede hacer interesante o al menos nada desdeñable la presente memoria.

## 8. ANEXOS

### ANEXO 1 Construcción de diagramas de cortante y momento

Los *diagramas* representan la variación de estas fuerzas a lo largo del elemento, dibujando en las abscisas la longitud del elemento y en las ordenadas el valor de la fuerza interna. Para axial y cortante los valores positivos se dibujan por encima del elemento pero para los momentos se dibujará el diagrama para el lado traccionado del elemento, así, si el elemento es horizontal el lado positivo del diagrama estará para abajo. La convención para momentos rige para cualquier ubicación de este en el espacio y es independiente del origen escogido, ya sea este en el extremo derecho o izquierdo del elemento.

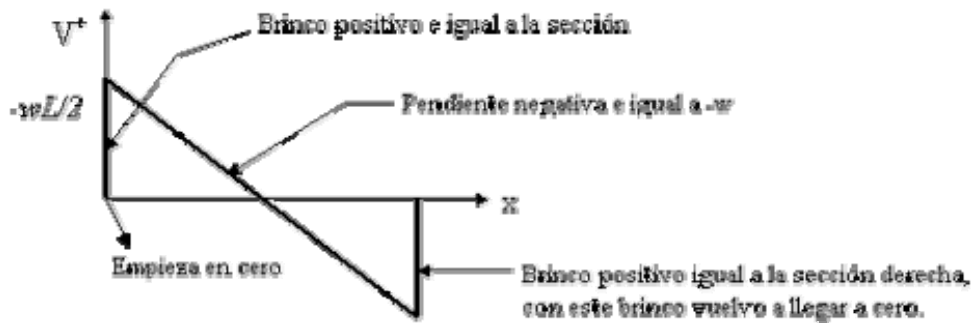
#### Viga simplemente apoyada con una carga distribuida uniformemente



#### Construcción del diagrama de corte:

- Sabemos que el elemento está en equilibrio por lo tanto el diagrama empieza en cero y termina en cero.
- Cuando hay fuerzas puntuales estas implican un brinco igual a su valor en el diagrama de corte (variación brusca de este), el brinco se da en la misma dirección de la carga puntual aplicada.
- Recordemos que el valor  $-w$  es la pendiente del diagrama de cortante.

Empezando por el lado izquierdo tenemos:



Notemos que la sección del extremo se convierte en el cortante, así podríamos decir que  $Va = Ay$  y  $Vb = By$ .

Determinaremos el punto donde el corte es cero:

Si  $V = Va_1 - wx$  entonces igualando  $V = 0$  y despejando  $x$ , tenemos:

$$x = \frac{Va}{w}$$

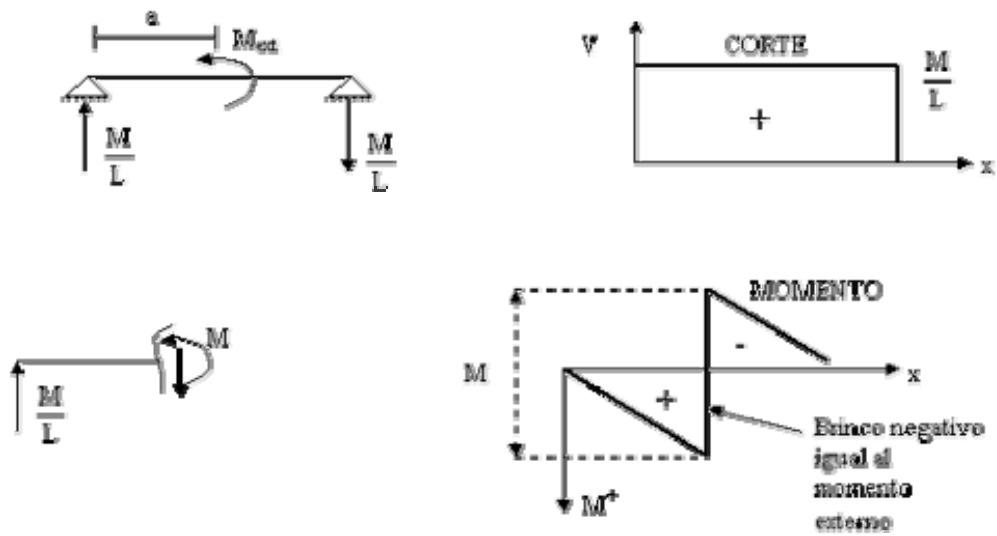
el punto de cortante cero se encuentra dividiendo el cortante de extremo por la carga  $w$ .

En resumen, podemos obtener el cortante en cualquier punto restando al cortante de extremo lo que llevamos de carga encima del tramo estudiado ( $w \cdot x$ ).

### Construcción del diagrama de momentos:

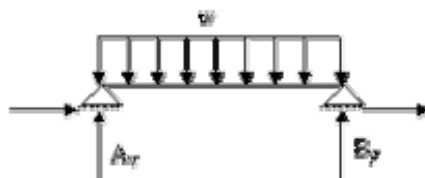
- El diagrama empieza en cero y termina en cero.
- Cuando hay momentos de extremo o puntuales se interrumpe la continuidad del diagrama presentándose un brinco en éste. Si el momento puntual es positivo, el brinco será negativo y viceversa. Tal y como se muestra en estos *ejemplos*:

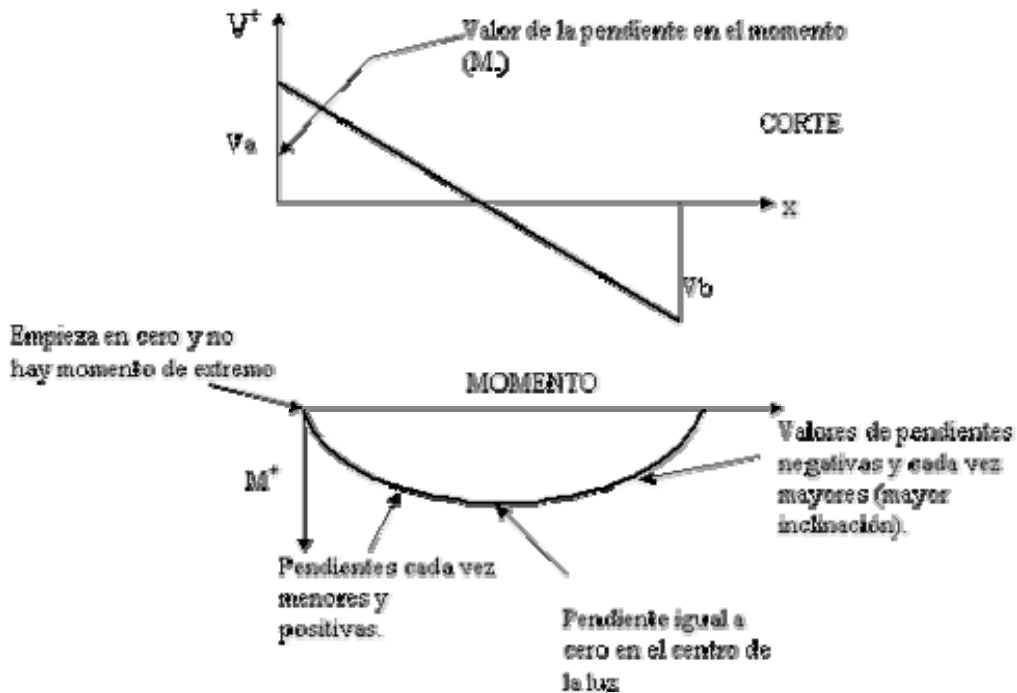




➤ Recordemos que el valor del cortante es igual a la pendiente del diagrama de momentos.

Retomando el ejemplo inicial y empezando por el lado izquierdo de la viga tenemos:

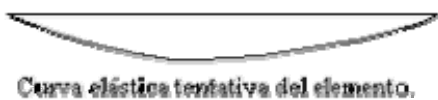




Según la convención fijada los momentos positivos producen tracciones en la parte inferior, por eso se coloca el eje positivo para abajo.

Notemos que con las pendientes se puede trazar fácilmente el diagrama de momentos, inclusive nos muestra la curvatura.

Sabemos que un momento positivo produce concavidad hacia arriba, por lo tanto la curvatura será hacia arriba.



#### Bibliografía:

1. M.I. Jesús Alonso Apodaca Espinoza. "Apuntes de Análisis Estructural". Ingeniería Civil. Universidad de Mexico. 2004

## **ANEXO 2      Módulo de inercia**

El momento de Inercia es la resistencia que un cuerpo en rotación opone al cambio de su velocidad de giro. A veces se denomina inercia rotacional. El momento de inercia desempeña en la rotación un papel equivalente al de la masa en el movimiento lineal. Por ejemplo, si una catapulta lanza una piedra pequeña y una grande aplicando la misma fuerza a cada una, la piedra pequeña se acelerará mucho más que la grande. De modo similar, si se aplica un mismo par de fuerzas a una rueda con un momento de inercia pequeño y a otra con un momento de inercia grande, la velocidad de giro de la primera rueda aumentará mucho más rápidamente que la de la segunda.

El momento de inercia de un objeto depende de su masa y de la distancia de la masa al eje de rotación. Por ejemplo, un volante de 1 kg con la mayoría de su masa cercana al eje tendrá un momento de inercia menor que otro volante de 1 kg con la mayoría de la masa cercana al borde exterior.

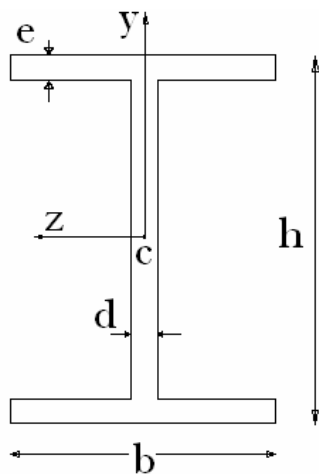
El momento de inercia de un cuerpo no es una cantidad única y fija. Si se rota el objeto en torno a un eje distinto, en general tendrá un momento de inercia diferente, puesto que la distribución de su masa en relación al nuevo eje es normalmente distinta.

El momento de inercia respecto al eje de la sección transversal de una viga se escribe:

$$I_{ejesecc} = \int_A y^2 dA$$

siendo A, el área de la sección transversal de la viga.

En casos sencillos, los momentos de inercia se calculan analíticamente con facilidad. Sea, por ejemplo, una sección en doble T, como la de la figura.



$$I_z = \int_A y^2 dA$$

Si hacemos  $h_1 = h - e$  y separamos el área en dos regiones

$$I_z = 2 \int_{h_1}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy + 2 \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 d dy$$

Resultando:

$$I_z = \frac{b(h^3 - h_1^3)}{12} + \frac{dh^3}{12}$$

Siendo:

$$h = 600 \text{ cm}$$

$$b = 300 \text{ cm}$$

$$e = 35 \text{ cm}$$

$$d = 25 \text{ cm}$$

Por tanto:

$$A = \text{Área} = 34250 \text{ cm}^2 = 3,42 \text{ m}^2$$

$$I = 21,2807 \text{ m}^4$$

Bibliografía:

1. Módulo de Inercia, Wikipedia: Enciclopedia virtual.
2. S. Timoshenko, Resistencia de Materiales, Primera Edición Espasa-Calpe, Madrid, 1970.

### **ANEXO 3 Ecuaciones diferenciales lineales**

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que intervienen derivadas de una o más funciones.

La resolución de ecuaciones diferenciales es un tipo de problema matemático consistente en buscar una función de cumpla determinada ecuación diferencial.

Estas ecuaciones se clasifican en dos tipos. En la ecuación diferencial ordinaria sólo participan derivadas totales, y existen métodos de resolución genérica según el tipo

La ecuación diferencial en derivadas parciales es de alta complejidad, suelen ser capítulos o tratados enormes. Cada caso es especial y tiene su método particular de resolución.

Dentro de las ecuaciones diferenciales ordinarias están las ecuaciones diferenciales lineales. Estas son el tipo de funciones analíticas que se usan por ejemplo para representar los campos vibratorios.

#### **Teoría**

Se les da el nombre de Ecuaciones Diferenciales Lineales, si la relación entre las derivadas sucesivas de sus coeficientes es de la forma:

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y + a_n(x) y = h(x)$$

Si  $a_0(x)$  es diferente de cero, la ecuación se normaliza

$$y^{(n)} + b_1(x) y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x) y + b_n(x) y = h(x)/a_0(x)$$

#### **Clasificación:**

1.- a) Si  $h(x) = 0$ , la ecuación es *homogénea*.

Si  $h(x)$  es *distinto de cero*, la ecuación es *lineal no homogénea*.

2.- a) Si  $a_1(x)=c$  para toda  $y$ , la ecuación es *lineal de coeficientes constantes*.

Si  $a_i = a_i(x)$  para toda  $i$ , la ecuación es lineal de coeficientes variables.

Sea  $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$  una e.d.o. (1)

con su homogénea correspondiente  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Principio de superposición o linealidad:

1.- Sean  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  soluciones parciales de la ecuación homogénea:

$c_1 y_1(x)$  y  $c_2 y_2(x)$  son soluciones de (2) y

$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  es también una solución.

2.-  $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  es también solución general de la ecuación (2).

3.- Las soluciones de la ecuación (1) pueden ser:

$y_1(x)$  y  $y_2(x)$  de la ecuación homogénea correspondiente y una solución  $y(r(x))$  (particular), determinada por  $r(x)$ .

Método de solución para las ecuaciones diferenciales lineales:

De orden mayor o igual a 2.

La ecuación diferencial normalizada toma la forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

o Si  $p(x)$  y  $q(x)$  son constantes, la ecuación toma la forma:

$$y'' + ay' + by = r(x)$$

es llamada *lineal de coeficientes constantes*.

o Cuando  $r(x) = 0$ , la ecuación es *homogénea*, si  $r(x)$  es diferente de cero, la ecuación es *no homogénea*.

o Para resolver las ecuaciones se usarán las propiedades de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

1. En el caso más sencillo de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes homogénea se busca la solución por analogía con las ecuaciones lineales homogéneas de primer orden:

$$y = e^{mx}$$

m = constante a determinar

al derivar dos veces y substituir en la ecuación correspondiente:

$$(m^2 + am + b) e^{mx} = 0$$

dado que  $e^{mx}$  es diferente de cero  $\rightarrow m^2 + am + b = 0$ .

Los valores de este polinomio, llamado *característico* determinan las soluciones

$$y = e^{m_1x}$$

$$y = e^{m_2x}$$

2. Ecuaciones no homogéneas:

I) Método de coeficientes variables:

- Proponer una solución particular  $y_p = y(r(x))$ .
- Cuidar que no exista dependencia lineal con las soluciones parciales de la ecuación homogénea correspondiente.
- Determinar, al derivar la solución propuesta  $y_p$  y substituir en la ecuación original, los coeficientes que hacen válida la propuesta.

II) Método General:

Este método tiene la ventaja de no requerir independencia lineal para determinar la solución particular que se propone; además de que las funciones  $r(x)$  pueden o no ser de orden exponencial; es decir, la única restricción que se impone es que  $r(x)$  sea integrable.

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

donde  $y_1$  y  $y_2$  son soluciones parciales de la ecuación homogénea correspondiente.

○ Supóngase

$$c_1 = c_1(x) \text{ y } c_2 = c_2(x)$$

○ Derívese



$$y_p = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

con la condición de que

$$c_1 y'_1(x) + c_2 y'_2(x) = 0$$

o Se obtiene un sistema de ecuaciones

$$c_1 y'_1(x) + c_2 y'_2(x) = 0$$

$$c'_1 y'_1(x) + c'_2 y'_2(x) = r(x)$$

al resolver el sistema y determinar a las funciones

$$c_1(x) \text{ y } c_2(x)$$

se obtiene la solución parcial buscada.

## **ANEXO 4      Cavitación**

La **cavitación** o aspiración en vacío es un efecto hidrodinámico que se produce cuando el agua o cualquier otro fluido pasa a gran velocidad por una arista afilada, como la pala de la hélice, produciendo una descompresión del fluido. Puede ocurrir que se alcance la presión de vapor del líquido de tal forma que las moléculas que lo componen cambian inmediatamente a estado de vapor, formándose burbujas o, más correctamente, cavidades. Las burbujas formadas viajan a zonas de mayor presión e implotan (el vapor regresa al estado líquido de manera súbita, «aplastándose» bruscamente las burbujas) produciendo una estela de gas y un rápido desgaste de la superficie que origina este fenómeno.

La implosión causa ondas de presión que viajan en el líquido. Estas pueden disiparse en la corriente del líquido o pueden chocar con una superficie. Si la zona donde chocan las ondas de presión es la misma, el material tiende a debilitarse metalúrgicamente y se inicia una erosión que, además de dañar la superficie, provoca que ésta se convierta en una zona de mayor pérdida de presión y por ende de mayor foco de formación de burbujas de vapor. Si las burbujas de vapor se encuentran cerca o en contacto con una pared sólida cuando implosionan, las fuerzas ejercidas por el líquido al aplastar la cavidad dejada por el vapor dan lugar a presiones localizadas muy altas, ocasionando picaduras sobre la superficie sólida.

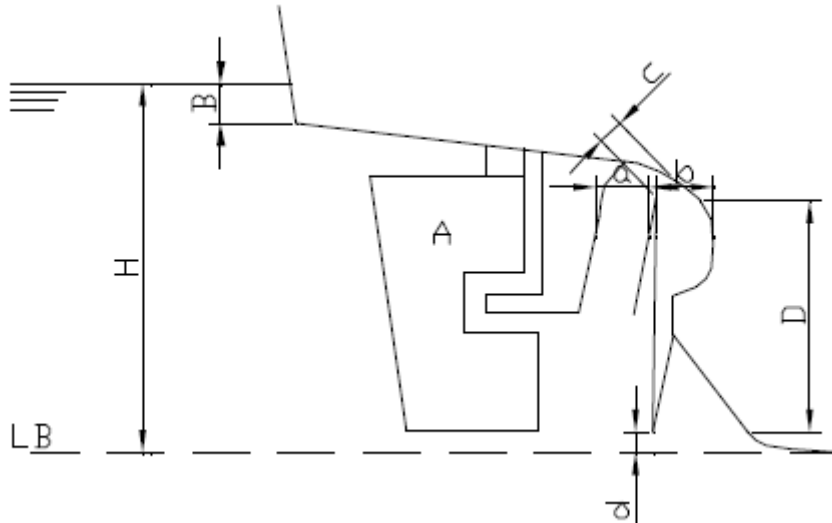
El fenómeno generalmente va acompañado de ruido y vibraciones, dando la impresión de que se tratara de grava que golpea en las diferentes partes de la estructura.

Se puede presentar también cavitación en otros procesos como, por ejemplo, en hélices de aviones, bombas y tejidos vascularizados de algunas plantas.

### **Bibliografía:**

1. Cavitación, Wikipedia, Enciclopedia virtual.

## ANEXO 5 Vano de popa y timón



$D$  = Diámetro de la hélice. Para propulsión convencional, se sitúa entre

0,63 y 0,67H.

$H$  = Calado

$B$  = Inmersión de la popa mínima recomendable = 0,05/0,1H

$A$  = Área de la pala del timón =  $\frac{HL}{100} \left[ 1 + 25 \left( \frac{B}{L} \right)^2 \right] m^2$

Distancias recomendadas:

$a > 0,2R$  (hélice)

$b > (0,7 - 0,04z)R$  ( $z$  = número de palas)

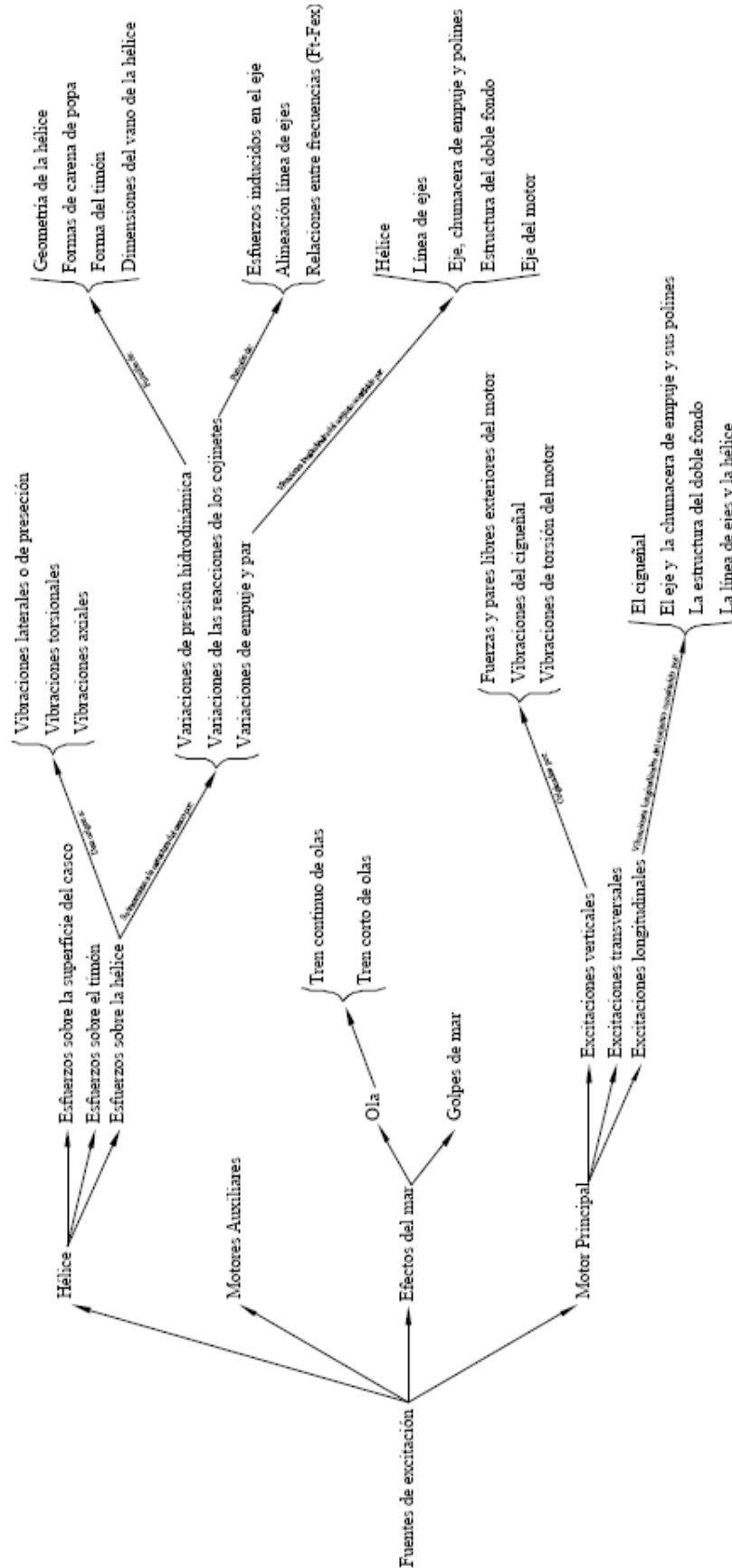
$c > (0,48 - 0,02z)R$

$d > 0,07 R$

Bibliografía:

1. Molinier Pappalardo Matías Maximiliano. Predicción de vibraciones en buques. Universidad de Buenos Aires. Dpto. Ingeniería Naval. 2005

## ANEXO 6 Fuentes excitadoras



## **ANEXO 7      Masa añadida**

Las presiones dinámicas que actúan sobre la parte sumergida del casco en su movimiento vibratorio juegan un papel importante en el comportamiento dinámico del buque. Para tener en cuenta estos efectos se introduce un término adicional en las ecuaciones de movimiento denominado masa añadida o agua arrastrada.

En condiciones de fluido incompresible puede establecerse la ecuación del problema acoplado en la forma siguiente:

$$(M + \bar{M})\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$$

donde las matrices  $M$ ,  $C$  y  $K$  representan, respectivamente, la masa, el amortiguamiento y la rigidez de la estructura, y  $X$  los desplazamientos de los nudos de la estructura. La matriz de masa añadida viene dada por:

$$\bar{M} = \rho LH^{-1}L^T$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $L$  la matriz de interacción y  $H$  la matriz del fluido.

### **Bibliografía:**

1. Molinier Pappalardo Matías Maximiliano. Predicción de vibraciones en buques. Universidad de Buenos Aires. Dpto. Ingeniería Naval. 2005.

## **ANEXO 8      Bibliografía**

1. Adán Javier Levy: Apunte teórico, “vibración de estructuras”. Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, 2005.
2. Antonio Barrios G. “Apuntes de Cálculo de Estructuras Marinas”. E.U de Ingeniería técnica naval, Departamento de construcciones navales, Cádiz, 1983.
3. Prof. Aurelio Guzmán Canañas y Prof. Pedro Gallardo Mateo. Libro: “Teoría del buque”. Departamento de construcciones navales. E.U de Ingeniería técnica naval. Cádiz.
4. *Cases, causes and cures*. Marine engineers review, August 1998, - pp,31-32.
5. E. Oñate. Calculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. CIMNE, Barcelona, 1995.
6. Francisco Beltrán: “Teoría general del Método de los Elementos Finitos”. Notas de Clase. Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales. ETS Ingenieros Industriales Madrid. Curso 1998-99.
7. Prof. Francisco Fernández González. Capítulo: "La construcción y la arquitectura naval". Libro: "Historia de la Ingeniería en España". ETSI navales. Universidad politécnica de Madrid.
8. Francisco Piniella Corbacho: Roll-on/Roll-off: (El buque abierto)/, Universidad de Cádiz, Cádiz, 1993.
9. Jesús Monclús. “Con el coche a flote”. Revista Automovilística “Autoclub”.
10. Manuel Vázquez, Eloísa López: “El Método de los Elementos Finitos, aplicado al análisis estructural”, Noela, Madrid, 2001.
11. Martha Guerrero, Sergio Valderrábano S. Rolando Campos R. Miren Ainoa Isasi Larrea: “Aplicación del método de elemento finito al análisis nodal”, Ingenierías, 1999.
12. Matías Daniel Vigliano: Vibraciones libres no amortiguadas en barras y chapas delgadas. Método de los elementos finitos. "Instituto de Tecnología Prof. Jorge Sabato". Ingeniería en Materiales. 2005.

13. M.I. Jesús Alonso Apodaca Espinoza: “Apuntes de Análisis Estructural”. Ingeniería Civil. Universidad de México, 2004.
14. Molinier Pappalardo Matías Maximiliano. Predicción de vibraciones en buques. Universidad de Buenos Aires. Dpto. Ingeniería Naval. 2005.
15. *Noise and vibration*, Notes on vibration, Marine engineers review, June 2005, -pp, 28.
16. O.A.Rascón Ch, R.Cervantes B y TJ Cervantes Q: Seminario: El Método del Elemento Finito en la ingeniería estructural. Instituto mexicano del transporte. Coordinación de desarrollo tecnológico,2006.
17. O.C. Zienkiewicz y R.L.Taylor. El Metodo de los Elementos Finitos. McGraw-Hill. Barcelona. 1994.
18. D. Publio Beltrán Palomo: Jornadas sobre industrias, servicios e infraestructura para el transporte marítimo de pasajeros, cruceros y turismo de recreo en el mediterráneo. Técnicas y servicios de ingeniería S,L, Barcelona, 2001.
19. Profesor Rafael F. Camacho Morales: “Apuntes de Introducción al análisis experimental de esfuerzos mediante extensómetros eléctricos”, Instituto tecnológico de la Paz, Mexico.
20. R.F.Steidel Jr: “Introducción al estudio de las Vibraciones Mecánicas”, Continental, México, 1995.
21. Revista Trimestral de Acciona, N°33, Verano 2006.
22. S. Timoshenko, Resistencia de Materiales, Primera Edición Espasa-Calpe, Madrid, 1970.
23. Ulrik Moller Rasmussen, anders Riis Sorensen, Vibration Assessment and Local Vibration Analysis Ro-Ro Passenger Vessels, Odegaard & Danneskiold-Samsøe A/S, Astillero Españoles, S.A, Puerto Real, 1997.



